Ocena rozprawy doktorskiej pana mgr. Karola Ławniczaka, pt. *Funkcja Wignera na rozmaitościach nietrywialnych topologicznie*

Tematem rozprawy doktorskiej pana mgr. Karola Ławniczaka są, zgodnie z tytułem, zagadnienia opisu układów kwantowych w terminach przestrzeni fazowej i odpowiednich rozkładów kwaziprawdopodobieństwa. Zakres poruszanych zagadnień nie ogranicza się do tytułowej funkcji Wignera, duża część rozprawy poświęcona jest stanom koherentnym, gdyż stany takie mają istotne znaczenie dla zrozumienia związków między mechanika klasyczną, wykorzystującą do opisu stanów układów fizycznych przestrzeń fazową, a mechaniką kwantową, w której stany są wektorami, lub operatorami w przestrzeni Hilberta. Funkcja Wignera dostarcza tu pewnej miary rozkładu w przestrzeni fazowej (i przestrzeni konfiguracyjnej oraz przestrzeni pędów poprzez odpowiednie rozkłady brzegowe) a stany koherentne są „stanami najbliższymi stanom klasycznym" gdyż minimalizują nieoznaczoność i można im przypisać sensowną „granicę klasyczną".

Rozprawa doktorska pana mgr. Ławniczaka składa się z dziewięciu rozdziałów. Rozdział I, wstępny, poświęcony jest przedstawieniu problematyki pracy. Autor zarysował tu główne idee opisu fazowego mechaniki kwantowej i potrzebę przeniesienia znanych metod takiego opisu na wypadki, gdy przestrzeń fazowa układu ma nietrywialną strukturę topologiczną tzn. nie jest, po prostu, iloczynem kartezjańskim odpowiedniej liczby przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. W rozdziale wstępnym Autor przedstawił cele pracy, opisał jej konstrukcję i wypunktował osiągnięte rezultaty.

Rozdział II pracy to bardzo dobra i wyczerpująca prezentacja podstawowych koncepcji używanych w pracy, tzn., kolejno: stanów koherentnych, funkcji Wignera, transformacji Weyla, Wignera i Segala-Bargmanna i rozkładu Husimiego dla euklidesowych przestrzeni fazowych. Autorowi udało się w sposób zwięzły i precyzyjny przedstawić związki miedzy wymienionymi koncepcjami. Prezentacja ma walory nie tylko jako przygotowanie gruntu do rozważań oryginalnych zawartych w dalszej części pracy, ale też jak źródło referencyjne w omawianym obszarze.

Rozdział III rozprawy zawiera podsumowanie (bez podawania szczegółów) różnych znanych metod uogólniania na przestrzenie nieeuklidesowe stanów koherentnych przy użyciu grup Liego i funkcji Wignera za pomocą uogólnień transformacji całkowych stosowanych w wypadku euklidesowym.

Rozdział IV rozpoczyna część pracy poświęconą prezentacji oryginalnych wyników Autora. Celem rozważań jest konstrukcja funkcji Wignera na okręgu. Rozdział rozpoczyna krótki opis parametryzacji wiązki stycznej do okręgu, tzn. cylindra (nazywanego przez Autora walcem). Autor konstruuje też „przestrzeń Hiberta dla okręgu" jako przestrzeń rozpinaną przez nienormalizowalne „wektory własne" operatora położenia na okręgu. Konstrukcja taka nie jest zbyt precyzyjna z czysto matematycznego punktu widzenia, ale, w sumie, w miarę jasna z punktu widzenia dalszych zastosowań. Zasadnicza część rozdziału poprzedzona jest ciekawą dyskusją problemów rozkładów prawdopodobieństwa na okręgu, a w szczególności obliczaniu i interpretacji średnich i wariacji takich rozkładów. Ma to istotne znaczenie dla dalszych rozważań Autora dotyczących konstrukcji „rozkładu normalnego na okręgu" i konstrukcji stanów koherentnych na okręgu przy użyciu odpowiedniego jądra cieplnego. W dalszej części rozdziału pan Ławniczak przedstawia i omawia cztery metody konstrukcji stanów koherentnych na okręgu. Dwie pierwsze polegają na swego rodzaju przeniesieniu stanów koherentnych na płaszczyźnie na okrąg za pomocą sumowania okresowego, albo poprzez wybór stanu podstawowego w postaci przeniesionego na okrąg za pomocą takiego sumowania gaussianu a następnie generowania stanów koherentnych za pomocą operatora przesunięcia na okręgu, albo przeniesieniu za pomocą sumowania okresowego wszystkich stanów koherentnych na okrąg. Trzecia metoda polega na przyjęciu za stan podstawowy opisanego wcześniej jądra cieplnego na okręgu i generowaniu z niego pozostałych stanów koherentnych za pomocą operatora przesunięcia tak, jak w metodzie pierwszej. Czwarta metoda polega na zdefiniowaniu stanów koherentnych za pomocą pewnego problemu własnego, w analogii do euklidesowych stanów koherentnych jako stanów własnych operatora anihilacji. Taka konstrukcja stanów koherentnych dla okręgu została zaprezentowana w roku 1996 w pracy wpółautorstwa promotora rozprawy, prof. Krzysztofa Kowalskiego. W podrozdziale 4.3.6 Autor stwierdza, że wszystkie te metody prowadzą do konstrukcji takich samych stanów koherentnych. Chociaż wydaje się to dość oczywiste, przynajmniej w odniesieniu do trzech pierwszych metod, to warto byłoby, choćby skrótowo, przytoczyć argumenty za tym stwierdzeniem. W następnych częściach rozdziału szczegółowo przedstawiono i przeanalizowano własności algebraiczne i analityczne stanów koherentnych (rozkład jedności, iloczyny skalarne stanów, reprezentacje pędową), ich własności statystyczne (wartości średnie, dyspersję, własności oczekiwane obserwabli) oraz ich ewolucję swobodną.

Ostatnia część rozdziału IV poświęcona jest głównemu wynikowi tej części pracy, tzn. konstrukcji funkcji Wignera dla okręgu za pomocą transformacji Weyla. Uzyskany wynik pokrywa się ze znanymi rezultatami otrzymanymi w innych kontekście i przy użyciu innych metod. Autor przedyskutował też statystyczne własności otrzymanej funkcji Wignera. Wartościowym wynikiem są tutaj dwa wzory na wartość funkcji Wignera dla stanów koherentnych. Trochę zabrakło mi dyskusji dodatniości, tzn. kwaziprobabilitycznego charakteru tej funkcji. Lepiej zostało to omówione w oryginalnej pracy [6] współautorstwa Autora, która była podstawą części rozdziału IV poświęconej funkcji Wignera.

Rozdział IV pracy może być potraktowany jako wprawka do znacznie bardziej zaawansowanego zdania, tzn. konstrukcji funkcji Wignera dla sfery jako przestrzeni konfiguracyjnej, co jest głównym i najważniejszym wynikiem pracy. Z puntu widzenia topologii, w odróżnieniu od poprzednio rozpatrywanego problemu okręgu, sytuacja jest bardziej skomplikowana. Nie tylko przestrzeń konfiguracyjna jest nieeuklidesowa, ale przestrzeń fazowa nie jest wiązką trywialną. W rozdziale V zaprezentowano konstrukcję odpowiedniej funkcji Wignera. Podobnie jak rozdział IV rozpoczynamy od parametryzacji przestrzeni konfiguracyjnej i fazowej oraz konstrukcji odpowiedniej przestrzeni Hilberta. Dalej, podobnie jak poprzednio, Autor omawia krótko problematykę statystyki na sferze, a następnie konstruuje stany koherentne. Podobnie jak w wypadku okręgu istnieje tu kilka możliwości. Autor omawia dwie: stany koherentne jako rozwiązania odpowiedniego problemu własnego skonstruowane przez Kowalskiego i Rembielińskiego oraz skonstruowane za pomocą jądra cieplnego na sferze przez Halla i Mitchella i omawia równoważność obu konstrukcji. Wyczerpująco dyskutuje Autor własności statystyczne stanów koherentnych.

Zaprezentowane w tym podrozdziale rezultaty są oryginalne, nie znalazłem ich w literaturze, choć same stany, jak wspomniano wyżej, były znane wcześniej.

Kulminacją pracy stanowi podrozdział 5.4. Zaprezentowano w nim najważniejszy wynik, tzn. konstrukcję funkcji Wignera dla sfery jako przestrzeni konfiguracyjnej. Jest to wynik nowy i oryginalny, przedstawiony w opublikowanej wspólnie z promotorem pracy [7]. Pan Ławniczak podaje definicję funkcji Wignera dla tego wypadku i dyskutuje jej właściwości pokazując, iż ma ona wymagane cechy: rzeczywistość i normalizowalność . Dyskutuje też jej ograniczoność – warto byłoby jednak w samej rozprawie doktorskiej przytoczyć szczegółowe obliczenia przedstawione w pracy [7], a nie tylko odwoływać się do nich, tym bardziej, że występujący w 5.4.2.3 symbol $W_{a,l}$ nie został objaśniony. W dalszej części rozważań Autor przedstawia wyniki obliczeń wartości skonstruowanej funkcji Wignera dla stanów koherentnych na sferze, stanach własnych momentu pędu.

Rozdział VI pracy przedstawia oryginalną koncepcję konstrukcji funkcji Wignera dla nietrywialnych topologii. Polega ona na wykorzystaniu skonstruowanej przez Halla uogólnionej transformacji Segala-Bergmana do uzyskania funkcji Husimiego, a stąd, poprzez odpowiednią transformację całkową, funkcji Wignera. Odpowiednią miarę w transformacji Segala-Bargmanna konstruuje się za pomocą jądra cieplnego na kompleksyfikacji przestrzeni konfiguracyjnej. Pomysł jest oryginalny. Pan Ławniczak pokazuje jego skuteczność na przykładzie omawianej wcześniej funkcji Wignera dla stanów koherentnych na okręgu. Sprawdzenie tej metody dla skonstruowanej w rozdziale V funkcji Wignera dla sfery Autor zapowiada jako cel dalszych badań.

Rozdział VII zawiera krótką dyskusję innych nietrywialnych przestrzeni konfiguracyjnych, hiperboloidy, walca (cylindra) i sfer n-wymiarowych z punktu widzenia konstrukcji stanów koherentnych i funkcji Wignera.

Rozdział VIII to podsumowanie wyników i propozycje dalszych badań. Rozdział XI o charakterze dodatku zawiera spis oznaczeń, szczegóły matematyczne dotyczące geometrii różniczkowej wiązki stycznej do okręgu oraz szczegółowe obliczenia pominięte w tekście głównym. Dołączona bibliografia jest wyczerpująca dla problematyki rozprawy.

Praca napisana jest dobrze, wywód jest logiczny, wyniki dobrze opisane. Nie dostrzegłem większych błędów redakcyjnych wartych wymienienia w recenzji (może tylko brak zapowiedzianego w tekście na stronie 18 (w pobliżu końca podrozdziału 2.4) zasługuje na taką wzmiankę.

Podsumowując uważam, że rozprawa doktorska pana mgr. Karola Ławniczaka, pt. *Funkcja Wignera na rozmaitościach nietrywialnych topologicznie* zawiera nowe i interesujące wyniki i spełnia wszelkie wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuje więc o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów postępowania o nadanie mu stopnia doktora.

Warszawa 29.12.2023

prof. dr hab. Marek Kuś