Politechnika Łódzka
Instytut Fizyki

dr hab. inż. Jaromir Tosiek, prof. uczelni
e-mail: jaromir.tosiek@p.lodz.pl
tel. (+4842) 631 36 42

Recenzja rozprawy doktorskiej Karola Ławniczaka "Funkcja Wignera na rozmaitościach nietrywialnych topologicznie"

1 Informacje ogólne o ocenianej pracy doktorskiej i jej tematyce

Dysertacja została przygotowana pod kierunkiem prof. dr hab. Krzysztofa Kowalskiego w Katedrze Fizyki Teoretycznej Wydziału Fizyki i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Łódzkiego. Jest napisana w języku polskim i ma objętość 129 stron. Składają się na nią: podziękowania dla promotora, informacja o oprogramowaniu użytym do obliczeń numerycznych, wstęp, właściwe rozdziały, podsumowanie, uzupełnienia oraz wykaz literatury. Rozprawa jest bogato ilustrowana i ciekawie zorganizowana - rozdziały składają się z podrozdziałów a te z kolei z podpodrozdziałów niekiedy zawierających jeszcze osobno numerowane paragrafy.

Część rezultatów prezentowanych zawartych w dysertacji została wcześniej opublikowana w renomowanych czasopismach fizycznych:

- K. Kowalski and **K. Ławniczak**, Wigner functions and coherent states for the quantum mechanics on a circle, *J. Phys. A: Math. Theor.* **54**, 275302 (2021) oraz
- K. Kowalski and **K. Ławniczak**, Wigner function for the quantum mechanics on a sphere, *Ann. Phys.* **457**, 169428 (2023).

Publikacja z 2021 roku doczekała się trzech cytowań (stan na dzień 20 grudnia 2023r. na podstawie bazy Web of Science).

Recenzowana praca doktorska wpisuje się w dział fizyki i matematyki zwany mechaniką kwantową na przestrzeni fazowej. Jego początki sięgają pierwszej połowy XX wieku, kiedy to ukazały się prace H. Weyla (H. Weyl, Theory of Groups and Quantum Mechanics, Methuen, London 1931), E. P. Wignera (E. P. Wigner, On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932)), H. J. Groenewolda (H. J. Groenewold, On the principles of elementary quantum mechanics, *Physica* **12**, 405 (1946)) oraz J. E. Moyala (J. E. Moyal, Quantum mechanics as a statistical theory, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **45**, 99 (1949)). Od tamtego czasu prowadzone są badania nad ujęciem fizyki

POLITECHNIKA ŁÓDZKA, Instytut Fizyki
ul. Wólczańska 217/221, 93-005 Łódź, budynek B15
tel. +48 42 631-36-41, +48 42 631-39-69, w7i71@adm.p.lodz.pl
Adres do korespondencji:
ul. Żeromskiego 116, 90-924 Łódź

kwantowej w języku przestrzeni fazowych i co roku ukazują się liczne prace poświęcone temu formalizmowi. Nadto od lat siedemdziesiątych ubiegłego stulecia w matematyce rozwija się jej gałąź zwana teorią deformacji, której korzenie sięgają mechaniki kwantowej na przestrzeni fazowej.

Z prespektywy fizyki sformułowanie mechaniki kwantowej na przestrzeni fazowej ma dwie wielkie zalety w porównaniu z tradycyjnym opisem mikroświata w języku przestrzeni Hilberta. Po pierwsze, stany modelowane są na przestrzeni używanej do hamiltonowskiego przedstawienia klasycznego odpowiednika badanego zespołu. Po drugie, możliwość stosowania geometrii różniczkowej stwarza warunki do reprezentowania układów o klasycznie nietrywialnych czyli różnych od $\mathbb{R}^{2n}$, przestrzeniach symplektycznych. Co więcej, znane są obecnie metody reprezentowania na przestrzeni fazowej kwantowych stopni swobody nie posiadających granicy klasycznej, np. spinu.

Reprezentacja mechaniki kwantowej na przestrzeni fazowej wymaga odpowiedzi na szereg pytań, z których najistotniejsze wydają się: jaka jest struktura przestrzeni fazowej (to wcale nie musi być rozmaitość różniczkowa), jak mnożyć przez siebie obserwable (konstrukcja mnożenia "$*$"), czym są stany (definicja funkcji Wignera) oraz jak wygląda odpowiedniość pomiędzy modelem systemu na przestrzeni fazowej a jego modelem na przestrzeni Hilberta, gdy takowy istnieje (postać operatora Stratonovicha – Weyla).

Dysertacja Karola Ławniczaka odnosi się do trzech ze sformułowanych powyżej problemów - zawarta jest w niej dyskusja wybranych rozmaitości fazowych, analizowana jest reprezentacja stanów oraz wskazane są, zależne od przestrzeni fazowej, relacje pomiędzy funkcją falową należącą do przestrzeni Hilberta a odpowiadającą jej funkcją Wignera.

P. Ławniczak skupia się na dyskusji układów kwantowych o przestrzeni konfiguracyjnej będącej okręgiem oraz sferą. Bada różne warianty opisu probabilistycznego takich systemów. Następnie wprowadza stany koherentne na nich by za pośrednictwem transformacji Weyla zdefiniować funkcje Wignera i rozpatrzyć ich własności ogólne oraz podać przykłady. Wreszcie proponuje uogólnioną konstrukcję kwaziprawdopodobieństwa na systemy o przestrzeniach konfiguracyjnych będących rozmaitościami różniczkowymi różnymi od $\mathbb{R}^n$.

Dalsza część niniejszej recenzji zawiera ocenę rozprawy doktorskiej sporządzoną zgodnie z zaleceniami Rady Doskonałości Naukowej opublikowanymi w wytycznych "Recenzje w postępowaniach o awans naukowy. Poradnik"

2 Czy rozprawa doktorska prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną w określonej dyscyplinie?

Dysertacja bazuje na wiedzy z dwóch dyscyplin: fizyki oraz matematyki. I tak rozdział drugi zawiera informacje niezbędne do zrozumienia rozważań zawartych w dalszych częściach pracy. W szczególności sporo miejsca poświęcono stanom koherentnym, których badanie na okręgu oraz sferze jest jednym z głównych wyników rozprawy. W kontekście analizy, czy dysertacja prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną, na uwagę zasługuje rozdział trzeci zawierający krótkie charakterystyki obecnych w literaturze podejść do stanów koherentnych. Bardzo podobają mi się szczegółowe analizy wielkości statystycznych typu średnia i wariancja na okręgu oraz sferze czy dyskusja odpowiednika rozkładu normalnego na okręgu. O orientacji p. Ławniczaka w tematyce świadczy także bibliografia. Z przekonaniem zatem stwierdzam, iż Autor wykazał się w swojej rozprawie doktorskiej odpowiednią wiedzą ogólną.

3 Czy rozprawa doktorska wykazuje umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej?

Znalezienie odpowiedzi na tak postawione pytanie nie jest proste. Udzielę jej w oparciu o kilka przesłanek. Proszę zauważyć, iż najważniejsze wyniki zawarte w dysertacji zostały opublikowane w artykułach w bardzo dobrych czasopismach: Annals of Physics oraz Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. Karol Ławniczak jest jednym z dwójki autorów, co pozwala przypuszczać, iż miał istotny wkład intelektualny w ich powstanie.

Po drugie, doktorat jest spójny treściowo. Tytułowa funkcja Wignera pojawia się stosunkowo późno, bo na 67 stronie. Wynika to jednak z faktu, że Autor bardzo starannie przygotował grunt pod jej wprowadzenie. Jak już wspomniałem w poprzednim rozdziale, drobiazgowo rozpatrzył możliwości zastosowania statystyki na badanych przestrzeniach. Następnie równie dokładnie przeanalizował generowanie stanów koherentnych. I dopiero po tych krokach zmierzył się w konstrukcją rozkładu kwaziprawdopodobieństwa.

Dysertacja p. Ławniczaka jest pracą czysto teoretyczną. Ale w momentach, gdy zawodziły metody analityczne, Autor przeprowadzał rozważania oparte o rezultaty numeryczne. Odkrywał też i przyznawał się do przypadków, w których stosowane narzędzie nie sprawdzało się. Mam tu na myśli niejednoznaczność średniej wewnętrznej dla ewolujących stanów koherentnych wskazaną w paragrafie 4.3.10.2

Kolejnym dowodem na samodzielność jest propozycja uogólnionej konstrukcji funkcji Wignera dla nietrywialnych rozmaitości będąca treścią szóstego rozdziału. Jakkolwiek pewne aspekty techniczne metody wymagają w mojej ocenie przedyskutowania, sama umiejętność naszkicowania jej świadczy o głębokim zrozumieniu analizowanego zagadnienia i zdolności wskazywania dalszych kroków w badaniach naukowych.

Samodzielność naukowa to także nieustanne pytanie i sprawdzanie uznanych już wyników. W tym sensie na podkreślenie zasługuje "wyłapanie" błędu w czynniku liczbowym w opublikowanej wcześniej przez innych naukowców publikacji (patrz formuła (5.3.8) z poprzedzającym ją komentarzem).

4 Czy rozprawa stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego?

Sformułowanie mechaniki kwantowej na przestrzeni fazowej stawia szereg wyzwań. Pierwszym jest wybór przestrzeni fazowej. Przypadek układów operujących w przestrzeni konfiguracyjnej $\mathbb{R}^n$ jest szczególny, bowiem akurat dla nich klasyczna przestrzeń fazowa jest zarazem przestrzenią kwantową. Ale już w przypadku kwantowej cząstki na okręgu bądź sferze tak być nie musi. I z takimi przypadkami zmierzył się w swojej dysertacji p. Ławniczak. W rozdziale czwartym, poświęconym analizie mechaniki kwantowej na okręgu, Doktorant pokazał, iż kwantowa przestrzeń fazowa nie jest trywialną wiązką wektorową $S^1 \times \mathbb{R}$ lecz zbiorem $S^1 \times \mathbb{Z}$. W przypadku sfery natomiast Autor nie podał jawnej postaci struktury kwantowej przestrzeni fazowej, ale ustalił, że różni się od przypadka klasycznego pisząc "najbliższym jej (tzn. przestrzeni fazowej) substytutem jest przestrzeń wskaźników j, m związanych w wartościami własnymi odpowiadającymi wspólnym wektorom własnym operatorów L^2 i L_z." Te wyniki rzucają nowe światło na strukturę kwantowej przestrzeni fazowej która, jak widać, wcale nie musi być rozmaitością różniczkową. Analogiczna sytuacja ma miejsce, gdy buduje się odpowiednik przestrzeni fazowej w celu reprezentowania wewnętrznych stopni swobody układu kwantowego.

Wybór nietrywialnej przestrzeni fazowej postawił Doktoranta przed koniecznością dogłębnej analizy pojęć statystycznych takich jak średnia czy wariancja. Analizy tej dokonano w sposób wszechstronny, wykazując się głębokim zrozumieniem problematyki. Uzupełnieniem rozważań teoretycznych są liczne umiejętnie dobrane i sporządzone wykresy.

Funkcje Wignera dyskutowane w recenzowanej rozprawie reprezentują stany koherentne. I znowu, teoria stanów koherentnych jest dobrze znana w przypadku przestrzeni konfiguracyjnej $\mathbb{R}^n$, natomiast istnieją różne pomysły uogólniania tych stanów na przestrzenie nietrywialne. W podrozdziale 3.1 p. Ławniczak dokonuje przeglądu proponowanych w literaturze uogólnień stanów koherentnych, po czym dokonuje ich adaptacji do sytuacji na okręgu (podrozdział 4.3) i sfery (podrozdział 5.3).

Wreszcie Autor musiał odpowiedzieć na fundamentalne pytanie, czym w przypadku nietrywialnych przestrzeni fazowych jest funkcja Wignera. Do tak postawionego zagadnienia da się podejść na kilka sposobów. Można próbować zdefiniować rozkład kwaziprawdopodobieństwa poprzez podanie aksjomatów. Takie podejście ma jednak znikomy potencjał aplikacyjny. Ale zarówno okrąg jak i sfera są rozmaitościami zanurzonymi w przestrzeniach euklidesowych odpowiednio $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}^3$. W przypadku zaś układów kwantowych żyjących we wzmiankowanych przestrzeniach euklidesowych znany jest ich model matematyczny oparty na przestrzeniach Hilberta i działających w nich operatorach liniowych.

Do określenia funkcji Wignera na okręgu i sferze naturalne wydaje się zatem zaadaptowanie transformacji Weyla ustanawiających relację pomiędzy funkcjami na klasycznej przestrzeni fazowej a operatorami działającymi w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Tak też uczynił p. Ławniczak, co widać w formułach (4.4.8) oraz (5.4.10). Zwracam uwagę, że owa adaptacja jest procesem złożonym i jej wykonanie jest samo w sobie sporym sukcesem.

Jasno zatem widać, iż Autor w swojej rozprawie przedstawił oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, na które składają się min. wskazane powyżej elementy.

5 Uwagi i pytania

W ostatniej części recenzji zawieram kilka uwag o staranności, z jaką rozprawa została przygotowana, formułuję pytania oraz wskazuję brakujące w moim odczuciu informacje.

Złożenie i sformatowanie dysertacji takiej jak p. Ławniczaka to spore wyzwanie edytorskie. Nieuniknione w takiej sytuacji są pewne błędy. Wskazuję kilka z nich.

- str. 25 "Przestrzeń fazowa czyli wiązka styczna ..." zamiast **ko**styczna.
- str. 33 "Wzór (4.2.12) ma ..." zamiast "Wzór (4.2.10) ma ..."
- str. 34 Normalizacja pod formułą (4.2.12) powinna mieć postać $\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \rho(\phi) = 1$.
- str. 37 W zdaniu poprzedzającym formułę (4.3.1) zabrakło założenia o ograniczonym nośniku funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- Na dole strony 38 jest suma po k zamiast n. Taka niezgodność oznaczenia zmiennej w symbolu sumowania Σ oraz w wyrażeniu pod sumą pojawia się kilkukrotnie.
- Brakuje symbolu pierwiastka w mianowniku wzoru (4.3.16).
- str. 79 i 80 Po wzorze (5.1.6) objaśniono znaczenie symbolu $\hat{I}$ i uczyniono to za moment ponownie w pierwszym akapicie sekcji 5.1.5.
- str. 94 w wyrażeniu (5.4.3) powinno być $d\nu(\lambda) = d\lambda d\beta$ zamiast $d\nu(\xi) = d\lambda d\beta$.

Chcę też zadać kilka pytań.

1. We Wstępie na stronie 9 czytamy "Obszary przestrzeni fazowej o ujemnej wartości funkcji Wignera mają rozmiary rzędu stałej Plancka, więc, za sprawą zasady nieoznaczoności, nie są obserwowane jako "ujemne prawdopodobieństwa" zarejestrowania układu w danym stanie. Znikają też w granicy klasycznej." Jak należy rozumieć (a najlepiej obliczać) ową granicę klasyczną?
2. Na stronie 13 pada stwierdzenie: "... jeśli tylko przestrzeń jest topologicznie euklidesowa, co do zasady istnieje możliwość sprowadzenia jej analizy do analizy przestrzeni metrycznie euklidesowej przez uwzględnienie odpowiednich gęstości miar" Budowa mechaniki kwantowej na przestrzeni fazowej wymaga wprowadzenia algebry funkcji z nieprzemiennym ale łącznym iloczynem $*$. W rachunku na szeregach formalnych wprowadzenie tego iloczynu na zakrzwionych przestrzeniach symplektycznych jest nie lada wyzwaniem a formuły ścisłe nie są znane. Czy widzi Pan możliwość sprowadzenia iloczynu $*$ na przestrzeni topologicznie euklidesowej do iloczynu Moyala na $\mathbb{R}^{2n}$?
3. W rozdziale siódmym czytamy "Hiperboloida jednopowłokowa często analizowana jest w analogii do sfery. Istotnie można ją rozpatrywać jako sferę o urojonym promieniu zanurzoną w przestrzeni Minkowskiego" Proszę o rozwinięcie tej idei. W szczególności interesuje mnie, jaką interpretację ma przestrzeń konfiguracyjna będąca przestrzenią Minkowskiego z iloczynem pseudoskalarnym.

4. Wykorzystując izomorfizm wiązek stycznej i kostycznej dla przypadku okręgu czy sfery Autor zastępuje badanie przestrzeni fazowej T^*M będącej wiązką kostyczną analizą przestrzeni stycznej TM. Jaka jest korzyść z tej zamiany? W szczególności co dzieje się z formą symplektyczną, która determinuje np. nawet czysto klasyczne równania ruchu czy istotnie wpływa na postać iloczynu gwiazdka $*$?

5. W podpodrozdziale 5.4.2 p. Ławniczak podaje jako podstawowe cechy funkcji Wignera: rzeczywistość, możliwość unormowania oraz ograniczoność. Czy wynika z nich w jakiś sposób dodatnia określoność funkcji Wignera jako funkcjonału?

Wreszcie wskażę elementy, których mi w omawianej pracy brakuje. Funkcja Wignera służy do zdefiniowania funkcjonału liniowego, którego działanie na funkcję daje jej wartość oczekiwaną. W przypadku układów o przestrzeni fazowej $\mathbb{R}^{2n}$ owo działanie funkcjonalne to całkowanie typu $\int_{\mathbb{R}^{2n}}$. Gdy jednak przestrzeń fazowa staje się dyskretna, należałoby chyba obliczać sumy ani na okręgu ani na sferze. W rozprawie nie znalazłem jawnej postaci działania $\langle W, f \rangle$.

Co więcej, istnieją różne warianty działania rozkładu kwaziprawdopodobieństwa na funkcje. Można przyjąć, iż funkcja Wignera jest odpowiednikiem operatora gęstości w odwrotnej transformacji Weyla i wówczas operacja brania śladu odbywa się w ogólności na iloczynie $W * f$ bądź zażądać, by z definicji obliczanie wartości średniej miało miejsce na iloczynie $\tilde{W} \cdot f$. Dla przypadka przestrzeni fazowej $\mathbb{R}^{2n}$ oba warianty realizowane są przez tę samą funkcję tj. $W = \tilde{W}$. W ogólności tak nie jest. Autor nigdzie nie napisał wprost, jaką opcję wybiera.

Ponadto oceniana dysertacja nie zawiera analizy ewolucji stanów koherentnych na sferze. Czy Autor planuje przyjrzeć się temu problemowi?

6 Rekomendacja

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska Karola Ławniczaka "Funkcja Wignera na rozmaitościach nietrywialnych topologicznie" spełnia w mojej opinii wszystkie kryteria zawarte w Ustawie o szkolnictwie wyższym i nauce z dnia 20 lipca 2018r. (Dz. U. 2018 poz. 1668). Uważam, że dotyka istotnego zagadnienia z mechaniki kwantowej, prezentuje jego oryginalne rozwiązanie, wskazuje potencjalne możliwości dalszych badań i jest dobrze napisana. Dlatego wnoszę o dopuszczenie Karola Ławniczaka do kolejnego etapu przewodu doktorskiego.

Łódź, 22.12.2023 r. Jaromir Tosiek