



Prof. dr hab. Dariusz Chruściński
Instytut Fizyki UMK

Toruń, 08.12.2023

Recenzja pracy doktorskiej mgra Karola Ławniczaka

„Funkcja Wignera na rozmaitościach nietrywialnych topologicznie”

Motywy przewodnim rozprawy doktorskiej mgra Karola Ławniczaka jest dogłębna analiza możliwych konstrukcji i własności funkcji Wignera w przypadku gdy przestrzeń fazowa układu ma nietrywialną topologię. Funkcja Wignera jest odpowiednikiem klasycznego rozkładu prawdopodobieństwa na przestrzeni fazowej. Jednak w odróżnieniu od klasycznej gęstości funkcja Wignera nie jest dodatnio określona i z tego powodu nazywana jest czasami kwazi-rozkładem. Reprezentacja stanu kwantowego poprzez funkcję Wignera umożliwia analizę własności układu kwantowego w analogii do analizy układu klasycznego na odpowiedniej przestrzeni fazowej. Formalizm ten pozwala efektywnie badać zarówno granicę klasyczną jak i kwantową dekoherencję. Funkcja ta zaproponowana przez Wignera w latach 30. ubiegłego wieku nadal znajduje ważne zastosowania w optyce kwantowej, teorii kwantowych układów otwartych, kwantowej teorii informacji, w teorii sygnałów, czy też w badaniu kwantowego chaosu. W latach 80. ubiegłego wieku Wootters zaproponował dyskretny analog funkcji Wignera (*discrete Wigner function*), która również znalazła ważne zastosowania w kwantowej teorii informacji. Funkcja Woottersa podobnie jak oryginalna funkcja Wignera jest ściśle związana z koncepcją baz komplementarnych. Przykładem takich baz są np. bazy operatora położenia i pędu w przestrzeni Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem. W skończone wymiarowych przestrzeniach Hilberta problem klasyfikacji baz wzajemnie komplementarnych jest nadal otwarty. Oryginalna funkcja Wignera zazwyczaj jest definiowana na przestrzeni fazowej R^{2n} gdzie „n” oznacza liczbę stopni swobody układu klasycznego. Praca doktorska mgra Ławniczaka wychodzi poza ten prosty schemat. Doktorant stawia szereg ważnych pytań. W szczególności jak zdefiniować funkcję Wignera



na topologicznie nietrywialnej przestrzeni fazowej. Ma to istotne znaczenie np. dla układów poddanych więzom. Takie układy są notorycznie trudne do analizy. Tym samym praca doktorska mgra mgra Karola Ławniczaka wpisuje się w ważny i aktualny nurt badań.

Praca doktorska mgra Ławniczaka stanowi ważny wkład w zrozumienie ważnych aspektów funkcji Wignera i stanów koherentnych na przestrzeniach o nietrywialnej topologii. Doktorant jest współautorem dwóch artykułów poświęconych tej problematyce:

1. K. Kowalski i **K. Ławniczak**, Wigner functions and coherent states for the quantum mechanics on a circle, *J Phys A: Math. Theor.* **54**, 275302 (2021)
2. K. Kowalski i **K. Ławniczak**, Wigner function for the quantum mechanics on a sphere, *Ann. Phys. (NY)* **457**, 169428 (2023)

Obie prace zostały opublikowane w wiodących czasopismach z fizyki teoretycznej i matematycznej. Bez wątpienia jest to solidny dorobek publikacyjny.

Praca ma klasyczny układ pracy doktorskiej: składa się z ośmiu rozdziałów (w sumie 110 stron), technicznego dodatku, oraz spisu literatury (46 pozycji). Napisana jest z dużą dbałością o precyzję prezentowanych tez i przedstawionych analiz. Po krótkim wprowadzeniu do tematyki funkcji Wignera na przestrzeni fazowej $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (Rozdział II), doktorant przedstawia dyskusję możliwych uogólnień standardowych definicji stanów koherentnych i funkcji Wignera na przestrzenie z nietrywialną topologią (Rozdział III). Rozdziały IV-VII prezentują główny materiał rozprawy. Rozdział VIII jest krótkim podsumowaniem.

Do najważniejszych wyników rozprawy zaliczam:

1. Detaliczną analizę formalizmu mechaniki kwantowej w przypadku gdy przestrzenią konfiguracyjną jest okrąg. Przestrzeń konfiguracyjna posiada nietrywialną topologię. Natomiast przestrzeń fazowa czyli wiązka kostyczna okręgu jest wiązką trywialną i posiada topologię walca. Autor dysertacji przedstawia ciekawą dyskusję stanów koherentnych na okręgu. Konstrukcja jest podobna do standardowej konstrukcji znanej z teorii oscylatora harmonicznego: stany są generowane z umownego stanu podstawowego poprzez działanie unitarnego operator przesunięcia. Jednak z powodu nietrywialnej topologii funkcje falowe stanów koherentnych na okręgu mają zupełnie inną strukturę niż te odpowiadające stanom koherentnym na prostej. Doktorant przedstawia detaliczną strukturę funkcji falowych na okręgu. Jak można było oczekiwać pojawia się tutaj inna klasa funkcji specjalnych – funkcje theta Jacobiego typu 3. Doktorant wyprowadza również zależność od czasu stanów koherentnych podczas ewolucji generowanej przez Hamiltonian cząstki swobodnej – w tym

przypadku kwadrat momentu pędu. Prezentowane wyniki zastały opublikowane w pracy [6].

2. Analizę funkcji Wignera na okręgu: używając naturalnego uogólnienia (wzór (4.4.1)) doktorant analizuje podstawowe własności funkcji Wignera. Prezentowane wyniki zastały opublikowane w pracy [6].
3. Detaliczną analizę formalizmu mechaniki kwantowej w przypadku gdy przestrzeń konfiguracyjną jest 2-wymiarowa sfera. W tym przypadku zarówno przestrzeń konfiguracyjna jak i odpowiednia wiązka kostyczna (przestrzeń fazowa) posiadają nietrywialną topologię. Autor rozprawy przedstawia dyskusję stanów koherentnych na na sferze. Konstrukcja takich stanów była znana wcześniej. Doktorant powołuje się na dwa podejścia - prace Kowalski-Rembieliński (2000) oraz Hall i Stenzel (1994,1999) – i dokonuje detalicznej analizy porównawczej używając różnych reprezentacji odpowiednich funkcji falowych. Ta część rozprawy jest dobrze zilustrowana wykresami rozkładu gęstości prawdopodobieństwa na sferze dla różnych parametrów stanu koherentnego.
4. Analizę funkcji Wignera na 2-wymiarowej sferze. Przedstawiono oryginalną konstrukcję funkcji Wignera, która w odróżnieniu od wcześniejszych prób w pełni wykorzystuje strukturę odpowiedniej przestrzeni fazowej, którą w tym przypadku jest nietrywialna wiązka kostyczna. Doktorant przeprowadza analizę podstawowych własności takiej funkcji oraz ilustruje funkcje Wignera dla stanów koherentnych. Prezentowane wyniki zastały opublikowane w pracy [7].
5. Zaprezentowanie uniwersalnej metody konstrukcji funkcji Wignera na nietrywialnych topologicznie rozmaitościach (Rozdział VI). Doktorant zamieszcza krótką dyskusję w przypadku walca i hiperboli. Ta część rozprawy po odpowiednim dopracowaniu może dać podstawę do wartościowej publikacji.

Przestawione w dysertacji wyniki są bez wątpienia ciekawe i wartościowe.

Uwagi krytyczne:

1. Zdecydowanie zabrakło mi ilustracji wprowadzonych narzędzi do analizy konkretnego układu fizycznego.
2. Nierównomierny podział zaprezentowanego materiału na rozdziały i podrozdziały: Rozdział III to zaledwie 1.5 strony tekstu, gdy natomiast Rozdział IV to aż 50 stron. Nie widzę wielkiego sensu wyodrębniania 1.5 strony jako niezależnego rozdziału.
3. Trochę zagadkowa jest dla mnie numeracja kolejnych sekcji materiału: np. rozdział II posiada pierwszy podrozdział 2.1, po czym następuje sekcja 2.1.1.1. Taka numeracja nie ułatwia czytania pracy.

4. Wprowadzanie momentu pędu w sekcji 4.1.2 nie jest dla mnie do końca jasne. Autor pisze „Analogicznie opiszmy wyróżniony wektor momentu pędu”. Ale co go wyróżnia?
5. Używanie żargonu typu „jądro cieplne”. Rozumiem, że jest to tłumaczenie „heat kernel”, ale nie brzmi to najlepiej. Termin „jądro cieplne” pojawia się w dysertacji 51 razy.
6. Wzór (4.2.1.): nie jest dla mnie jasne o jaką miarę Haara chodzi?
7. W definicji funkcji theta Jacobiego na stronie 118 powinno być sumowanie po „n” a nie po „k”.
8. Podsumowanie całej rozprawy jest bardzo lakoniczne. Oczekiwałbym bardziej wnikliwego podsumowania ponad 100-stronicowej dysertacji.

Te drobne uwagi krytyczne nie wpływają na ocenę końcową.

Ocena końcowa: Pracę doktorską mgra Karola Ławniczaka oceniam bardzo wysoko. Doktorant postawił szereg ambitnych problemów i uzyskał ważne i ciekawe rezultaty. Doktorant posiada gruntowną wiedzę teoretyczną oraz solidny warsztat badawczy dotyczący matematycznych aspektów mechaniki kwantowej. Wyniki doktoranta wnoszą istotnie nowe ważne elementy do formalizmu funkcji Wignera i stanów koherentnych na topologicznie nietrywialnych rozmaitościach. Przedstawione wyniki zostały częściowo opublikowane w serii prac w tak renomowanych czasopismach jak Journal of Physics A oraz Annals of Physics.

W związku z powyższym stwierdzam, że przedstawiona mi do recenzji rozprawa spełnia wszystkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszej części postępowania.



Dariusz Chruściński