Autoreferat

Entropia Segala stanu kwantowego na półskończonej algebrze von Neumanna i jej zastosowanie w zagadnieniach teorii pomiaru kwantowego

dr Hanna Podsędkowska
Katedra Teorii Prawdopodobieństwa i Statystyki
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego

29 sierpnia 2023

Spis treści

1 Dane Osobowe **4**
1.1 Imię i nazwisko 4
1.2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe 4
1.3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych 4

2 Omówienie wyników zawartych w pracach wchodzących w cykl osiągnięcia naukowego, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm. **5**
2.1 Wstęp 5
2.1.1 Entropia Segala 6
2.2 Własności entropii Segala 8
2.2.1 Własności ciągłości 8
2.2.2 Niezmienniczość i monotoniczność entropii względem odwzorowania α 9
2.2.3 Subaddytywność i addytywność entropii Segala 11
2.3 Entropia Segala dla stanów na produkcie tensorowym algebr von Neumanna 12
2.4 Charakteryzacja stanów o maksymalnej entropii Segala 14
2.5 Entropia pomiaru kwantowego 16
2.6 Ograniczenia typu Holevo dla różnych miar zależności stanów mierzonego systemu fizycznego 18

3 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze niewchodzące w cykl osiągnięcia naukowego **22**
3.1 Pomiar kwantowy, teoria instrumentów, operacje Lüdersa . . . 23
3.2 Dostateczność obserwabli oraz algebr von Neumanna generowanych przez statystyki kwantowe 24
3.3 Instrumenty nie zmieniające entropii stanu i klonowanie 27
3.4 Entropijne ograniczenie ryzyka Bayesowskiego 29
3.5 Postać operatora modularnego i funkcjonałów entropijnych w półskończonych algebrach von Neumanna 29
3.6 Inna działalność naukowo-badawcza 31

4 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, w szczególności zagranicznej. 32

5 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę. 33

1 Dane Osobowe

1.1 Imię i nazwisko

Imię i nazwisko: Hanna Podsędkowska

1.2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

- 2001 - stopień doktora nauk matematycznych otrzymany na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego,
  tytuł rozprawy: "Matematyczne zagadnienia teorii pomiaru kwantowego", *promotor*: prof. dr hab. Andrzej Łuczak
- 1993 - tytuł magistra matematyki otrzymany na Wydziale Matematyki Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego,
  tytuł rozprawy: "Teoria pomiaru kwantowego", *promotor*: prof. dr hab. Andrzej Łuczak
- 1988-1993 - studia stacjonarne w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyki Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego, indywidualny tok studiów (ukończone z wyróżnieniem)

1.3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- 1993-2000 - student Stacjonarnego Studium Doktoranckiego Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego
- 1996-2001 - asystent w Katedrze Teorii Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki na Wydziale Matematyki i Informatyki (w tym urlop macierzyński)
- 2001-2017 - adiunkt w Katedrze Teorii Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki na Wydziale Matematyki i Informatyki (w tym dwa urlopy macierzyńskie i pół roku urlopu zdrowotnego)
- 2017-2019 - st. wykładowca w Katedrze Teorii Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki na Wydziale Matematyki i Informatyki
- od 2019 do chwili obecnej - adiunkt w Katedrze Teorii Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki na Wydziale Matematyki i Informatyki

2 Omówienie wyników zawartych w pracach wchodzących w cykl osiągnięcia naukowego, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.

Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych

[O1] A. Łuczak, H. Podsędkowska *Properties of Segal's entropy for quantum systems* International Journal of Theoretical Physics 2017 **56**:3783-3793

Mój wkład (50%) polegał na rozpoznaniu i zdefiniowaniu problemu badawczego, współudziale w jego rozwiązaniu, opracowaniu wyników i napisaniu manuskryptu.

[O2] H. Podsędkowska, *Entropy of Quantum Measurement* Entropy 2015, **17**(3), 1181-1196; doi:10.3390/e17031181,

[O3] H. Podsędkowska, *Strong subadditivity of quantum mechanical entropy for semi-finite von Neumann algebras* Studia Mathematica 2020

[O4] A. Łuczak, H. Podsędkowska, M. Seweryn *Maximum Entropy Models for Quantum Systems* Entropy 2017 **19**(1): 1.

Mój wkład (33%) polegał na rozpoznaniu i zdefiniowaniu problemu badawczego, współudziale w jego rozwiązaniu i opracowaniu wyników.

[O5] H. Podsędkowska, R. Wieczorek *Holevo type bounds for general quantum system* Reports on Mathematical Physics 2017 **80**(3) 349-360

Mój wkład (50%) polegał na współudziale w rozpoznaniu i zdefiniowaniu problemu badawczego, rozwiązaniu w zakresie dotyczacym ograniczenia Holevo dla informacji kwantowej oraz współudziale w opracowaniu wyników i napisaniu manuskryptu.

2.1 Wstęp

Pojęcie kwantowej entropii zostało wprowadzone przez Johna von Neumanna [1] w 1932 roku i od tej pory stało się fundamentalnym pojęciem mechaniki kwantowej w jej “klasycznej” formie opartej na przestrzeni Hilberta. Entropia ta definiowana jest w sposób następujący. Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech ρ będzie stanem normalnym na algebrze $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ wszystkich liniowych, ograniczonych operatorów na $\mathcal{H}$. Stan ten jest wyznaczony jednoznacznie przez nieujemny, ograniczony operator liniowy h_ρ o śladzie jeden, tzw. macierz gęstości, wzorem:

$$\rho(x) = \mathrm{tr} h_\rho x. \qquad x \in \mathbb{B}(\mathcal{H}),$$

gdzie tr jest śladem kanonicznym na $\mathcal{H}$. Entropia von Neumana stanu ρ określona jest wzorem

$$H(\rho) = -\mathrm{tr}(h_\rho \log h_\rho).$$

Rozwój teorii kwantowej, w szczególności oparcie jej na teorii algebr operatorowych (C^* i W^* - algebr), sprawił, że konieczne stało się uogólnienie entropii von Neumanna na przypadek tych algebr. Uogólnienie takie przedstawione zostało po raz pierwszy przez I.E.Segala [2].

2.1.1 Entropia Segala

Niech $\mathcal{M}$ będzie półskończoną algebrą von Neumanna z normalnym, półskończonym, wiernym śladem τ i niech ρ będzie stanem normalnym na $\mathcal{M}$, tzn. ρ jest nieujemnym elementem predualu $\mathcal{M}_*$ algebry $\mathcal{M}$ o normie 1. Algebrę operatorów mierzalnych $\widetilde{\mathcal{M}}$ definiujemy jako topologiczną *-algebrę gęsto określonych, domkniętych operatorów na $\mathcal{H}$ przyłączonych do $\mathcal{M}$ z silnym dodawaniem + i silnym mnożeniem $\cdot$, tzn. $a+b = \overline{a+b}, \quad a \cdot b = \overline{ab}, \quad a, b \in \widetilde{\mathcal{M}}$, gdzie $\overline{a+b}$ i $\overline{ab}$ oznaczają domknięcia odpowiednich operatorów. Topologia w algebrze $\widetilde{\mathcal{M}}$ wyznaczona jest przez bazę otoczeń zera $\{N(\varepsilon, \delta) : \varepsilon, \delta > 0\}$, gdzie

$$N(\varepsilon, \delta) = \{a \in \widetilde{\mathcal{M}} : \text{ istnieje rzut } p \in \mathcal{M} \text{ taki, że } ap \in \mathcal{M},\ \|ap\| \leqslant \varepsilon \text{ i } \tau(\mathbb{1}-p) \leqslant \delta\}.$$

Przez $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich operatorów mierzalnych h o skończonym śladzie, tzn. takich, że $\tau(h) < \infty$. Normę w przestrzeni $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ określa wzór:

$$\|h\|_1 = \tau(|h|).$$

Jeśli ρ jest stanem normalnym na $\mathcal{M}$, wówczas, tak jak w przypadku algebry $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ρ i tzw. macierzą gęstości - nieujemnym operatorem h_ρ należącym do $L^1(\mathcal{M},\tau)$, takim, że jego miara spektralna należy do $\mathcal{M}$, poprzez następującą zależność:

$$\rho(x) = \tau(h_\rho x), \quad x \in \mathcal{M}.$$

Niech $f\colon x \to -x\log x$ będzie funkcją operatora na $L^1(\mathcal{M},\tau)$, wówczas można zdefiniować entropię S stanu ρ w sensie Segala w następujący sposób

$$S(\rho) =: \tau(f(h_\rho)) = -\tau(h_\rho \log h_\rho).$$

W przypadku dowolnej półskończonej algebry $\mathcal{M}$ spektrum operatora h_ρ może być równe $[0,+\infty)$ stąd funkcja operatora $h_\rho \log h_\rho$ jest wyrażana poprzez wzór

$$h_\rho \log h_\rho = h_\rho \cdot s(h_\rho) \log h_\rho,$$

gdzie $\cdot$ oznacza silne mnożenie operatorów w algebrze $\widetilde{\mathcal{M}}$ zaś $s(h_\rho)$ nośnik operatora h_ρ.

Oczywiście, entropia von Neumanna jest szczególnym przypadkiem entropii Segala, gdy $\mathcal{M} = \mathbb{B}(\mathcal{H})$ a ślad półskończony $\tau = \mathrm{tr}$. Istotną różnicą jest jednak fakt, że macierz gęstości stanu $\rho \in \mathbb{B}(\mathcal{H})_*$ jest operatorem ograniczonym a nawet śladowym, podczas gdy dla dowolnej algebry półskończonej h_ρ jest zazwyczaj operatorem nieograniczonym. Wykorzystując przedstawienie spektralne macierzy gęstości

$$h_\rho = \sum_n \lambda_n e_n$$

mamy

$$H(\rho) = -\sum_n (\lambda_n \log \lambda_n)\mathrm{dim}(e_n(\mathcal{H})) \geqslant 0, \text{gdy } \mathcal{M} = \mathbb{B}(\mathcal{H})$$

oraz

$$S(\rho) = -\int_0^{+\infty} \lambda \log \lambda \tau(e(d\lambda)) \leqslant \tau(\mathbb{1}) - \rho(\mathbb{1}), \text{ dla dowolnego } \mathcal{M}.$$

Badanie entropii Segala jest ideą stosunkowo nową, bo choć sama definicja pochodząca od Segala ma już prawie 60 lat (ze względu na komplikacje związane z nieograniczonością macierzy gęstości Segal ograniczył się tylko do $h_\rho \in \mathcal{M}$), to dokładniejszą analizą zajęli się dopiero D.Petz, M. Ohya [3] oraz M.B. Ruskai [4].

Własności entropii Segala badane były niemal wyłącznie przy założeniu, że gęstości stanów należą do algebry albo przy założeniu skończoności śladu. Wpływ pomiaru kwantowego na zmianę entropii stanu systemu był rozważany wyłącznie dla pełnej algebry $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ i entropii von Neumanna.

Słynny problem silnej subaddytywności sformułowany po raz pierwszy przez O.E. Lanforda i D.W. Robinsona [5], którego próby rozwiązania podejmowane były wielokrotnie w późniejszych latach, został rozwiązany tylko w przypadku pełnej algebry $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, natomiast jego prawidłowość w przypadku półskończonej algebry von Neumanna była sformułowana jako hipoteza.

W przedstawionym cyklu prac zaprezentowane są rozwiązania powyższych zagadnień. Prace zawierają analizę i dowody własności entropii dowolnego stanu na półskończonej algebrze von Neumanna znane dotąd tylko w przypadku algebry $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ albo algebry ze skończonym śladem. Ponadto zostały zaprezentowane badania nieznanych dotąd własności entropii Segala, jej zastosowania w zagadnieniach teorii pomiaru kwantowego i informacji kwantowej oraz dowód hipotezy silnej subaddytywności entropii (SSA) w przypadku algebry półskończonej. Silna subaddytywność entropii, w przypadku algebry $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, jest równoważna wielu bardzo istotnym własnościom np. monotoniczności entropii relatywnej, wklęsłości entropii warunkowej czy łącznej wypukłości entropii relatywnej, dlatego dowód SSA dla dowolnego stanu na iloczynie tensorowym półskończonych algebr von Neumanna otwiera możliwość rozwoju teorii w znacznie ogólniejszym kontekście matematycznym.

2.2 Własności entropii Segala

2.2.1 Własności ciągłości

W literaturze z dziedziny mechaniki kwantowej prezentowane są liczne własności entropii stanu, ale w zasadzie dotyczą one wyłącznie przypadku szczególnego, tzn. takiego, w którym system fizyczny opisany jest przez algebrę $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ ze śladem kanonicznym tr. W pracy [O1] badane były własności ciągłości i półciągłości entropii Segala w przypadku dowolnej algebry półskończonej i ciągłości entropii w przypadku algebry ze skończonym śladem. W pierwszym etapie badań uzyskano wyniki pomocnicze, które interesujące same w sobie, okazały się kluczowymi rezultatami wykorzystywanymi w ostatecznym dowodzie półciągłości:

Lemat 1 ([O1], Lemma 6). *Dla dowolnego stanu* $\rho \in \mathfrak{S} = \{\rho \in \mathcal{M}_*^+ \colon \|\rho\| =$

$1\}$ *funkcja* $\alpha \to S_\alpha(\rho)$ *jest malejąca na przedziale* $(1, +\infty)$, *gdzie*

$$S_\alpha(\rho) = \frac{1}{1-\alpha} \log \tau(h_\rho^\alpha), \quad \rho \in \mathcal{M}_*$$

jest kwantową entropią Rényiego.

Dowód powyższego lematu opiera się na fakcie, iż dla $\rho \in \mathcal{M}_*$, $0 < \alpha \leqslant \beta$, $h \in \mathcal{M}^+$ mamy $\rho(h^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \rho(h^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$.

Drugi istotny wynik zawarty jest w następującym lemacie:

Lemat 2 ([O1], Proposition 8). *Entropia Rényiego jest ciągła w topologii wyznaczonej przez normę* $\|\cdot\|_1$ *na zbiorze* $\{\rho \in \mathfrak{S} : \|h_\rho\|_\infty \leqslant c\}$ *dla każdego* $c \geqslant 0$. *Ponadto dla* $\mathcal{M} = \mathbb{B}(\mathcal{H})$ *i* $\tau = tr$, *entropia Rényiego jest ciągła na całym zbiorze* $\mathfrak{S}$.

W dalszym ciągu pracy [O1] zostało zauważone, że entropia Segala S jest granicą rosnącej sieci funkcji $\{S_\alpha : \alpha > 1\}$ tzn.

$$\lim_{\alpha \to 1+} (S_\alpha(\rho)) = -[\log \tau(h_\rho^\alpha)]'_{\alpha=1} = S(\rho),$$

Wobec powyższych faktów prawdziwe jest

Twierdzenie 3 ([O1], Theorem 9). *Entropia Segala jest półciągła z dołu w normie na zbiorze* $\{\rho \in \mathfrak{S} : \|h_\rho\|_\infty \leqslant c\}$ *dla każdego* $c \geqslant 0$. *Ponadto dla* $\mathcal{M} = \mathbb{B}(\mathcal{H})$ *i* $\tau = tr$ *entropia Segala jest półciągła z dołu w normie na całym zbiorze* $\mathfrak{S}$.

Ograniczając rozważania do algebr skończonych $\mathcal{M}$ otrzymano wynik silniejszy

Twierdzenie 4 ([O1], Theorem 10). *Niech* $\mathcal{M}$ *będzie skończoną algebrą von Neumanna z normalnym, skończonym, wiernym śladem* τ. *Wówczas entropia Segala jest ciągła w normie na zbiorze stanów, niekoniecznie unormowanych, ograniczonych, tzn. na* $\{\rho \in \mathcal{M}_*^+ : \|h_\rho\|_\infty \leqslant c\}$ *dla każdego* $c \geqslant 0$.

2.2.2 Niezmienniczość i monotoniczność entropii względem odwzorowania α

Niech $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ będzie normalnym dodatnim zachowującym jedność odwzorowaniem na algebrze von Neumanna $\mathcal{M}$ ze śladem półskończonym τ takim, że $\tau \circ \alpha = \tau$.

Wówczas (pre-) dualne odwzorowanie α_* jest zdefiniowane na $\mathcal{M}_*$ wzorem

$$\alpha_*(\rho) = \rho \circ \alpha.$$

W teorii pomiaru kwantowego $\alpha_*(\rho)$ reprezentuje stan systemu fizycznego po pomiarze wyrażonym poprzez α_*. Takie przekształcenia są często nazywane kanałami. W pracy [O1] została przedstawiona konstrukcja odwzorowania α_* na przestrzeni $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ oraz zbadane zostały jego własności.

Wyniki te można streścić w następujący sposób. Wykazane zostało, iż dla dowolnej algebry von Neumanna $\mathcal{M}$ z normalnym wiernym i półskończonym śladem τ oraz dla normalnego dodatniego, zachowującego jedność, liniowego odwzorowania α na $\mathcal{M}$ takiego, że $\tau \circ \alpha = \tau$ istnieje normalne dodatnie, zachowujące jedność liniowe odwzorowanie $\widetilde{\alpha}$ takie, że $\tau \circ \widetilde{\alpha} = \tau$

$$\tau(\alpha(x)y) = \tau(x\widetilde{\alpha}(y)), \quad x, y \in \mathcal{M}$$

$\widetilde{\alpha}$ jest odwzorowaniem sprzężonym do α.

Ponadto zachodzi

Twierdzenie 5 ([O1], Lemma 2)**.** *Niech* $\rho \in \mathcal{M}_*$ *takie, że* $h_\rho \in \mathcal{M}$*. Wówczas*

$$h_{\alpha_*(\rho)} = \widetilde{\alpha}(h_\rho).$$

Powyższy wynik uzyskuje się również bez założenia $h_\rho \in \mathcal{M}$. Można bowiem rozszerzyć odwzorowanie $\widetilde{\alpha}$ z algebry $\mathcal{M}$ na przestrzeń $L^1(\mathcal{M}, \tau)$.

O samym istnieniu odwzorowania $\widetilde{\alpha}$ na $\mathcal{M}$ wspominają M. Ohya i D. Petz w [3], ale dopiero opracowana w [O1] konstrukcja i wskazanie jego własności pozwalają na udowodnienie następujących twierdzeń dotyczących zmiany entropii stanu systemu kwantowego pod wpływem pomiaru:

Twierdzenie 6 (Monotoniczność entropii Segala [O1], Theorem 3)**.** *Niech* $\mathcal{M}, \tau$ *i* α *będą jak wyżej. Dla każdego* $\rho \in \mathcal{M}_*^+$ *prawdziwa jest następująca nierówność*

$$S(\alpha_*(\rho)) \geqslant S(\rho)$$

oraz

Twierdzenie 7 (Niezmienniczość entropii Segala [O1], Theorem 4)**.** *Niech* α *będzie *-homomorfizmem takim, że* $\tau \circ \alpha = \tau$*. Połóżmy* $\mathcal{N} = \alpha(\mathcal{M})$*. Równość*

$$S(\alpha_*(\rho)) = S(\rho)$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $h_\rho \in \mathcal{N}$*.*

Dowód ostatniego twierdzenia angażuje zarówno własności odwzorowania sprzężonego $\widetilde{\alpha}$ jak i istnienie warunkowej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, operatorową wypukłość funkcji $f\colon t \to t \log t$ oraz nierówność Jensena dla funkcji operatorowych.

Jako wniosek z powyższego twierdzenia, zostało też udowodnione, że dla α będącego *-automorfizmem i dla dowolnego $\rho \in \mathcal{M}_*$ entropia ρ i $\alpha_*(\rho)$ są identyczne.

2.2.3 Subaddytywność i addytywność entropii Segala

W pracy [O2] podjęte zostały badania dotyczące m. in. addytywności entropii Segala. Dotyczyły one przypadku algebry von Neumanna $\mathcal{M}$ ze skończonym i wiernym śladem τ oraz stanów ρ, których macierze gęstości h_ρ są ograniczone, tzn. $h_\rho \in \mathcal{M}$. W pracy tej przyjęto też definicję entropii Segala "zmodyfikowaną" o znak "-" w duchu definicji Boltzmanna, tzn. $H(\rho) = \tau(h_\rho \log h_\rho)$. Jednak dla zachowania jednolitości w referacie wyniki będą przedstawione dla "klasycznej" definicji entropii Segala, tzn. $S(\rho) = -\tau(h_\rho \log h_\rho)$.

Dla macierzy gęstości ograniczonych $h_\rho \in \mathcal{M}$, gdzie $\mathcal{M}$ jest algebrą von Neumanna ze śladem skończonym $\tau(\mathbb{1}) = 1$ entropia stanu jest ograniczona z góry i niedodatnia

$$S(\rho) = -\tau\Big(\int_0^{+\infty} \lambda \log \lambda e(d\lambda)\Big) \leqslant \int_0^{+\infty} (1-\lambda)\tau(e(d\lambda)) = \tau(\mathbb{1}) - \tau(h_\rho) = 0.$$

Ponadto dla dowolnych operatorów $a, b \in \mathcal{M}$ takich, że $0 \leqslant a \leqslant b$ zachodzi

$$\tau(a \log b - a \log a) \geqslant 0.$$

Równość w powyższej nierówności ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy operatory a i b komutują i

$$ab = ba = a^2.$$

Dodatkowo liczby $\tau(a \log b)$ i $\tau(a \log a)$ są skończone. Rezultaty powyższe ujęte w [O2], Proposition 1 zostały zastosowane w dowodzie

Twierdzenie 8 (O subaddytywności entropii, [O2] Theorem 1)**.** *Niech* $\rho, \varphi \in \mathcal{M}_*^+$ *oraz* $h_\rho, h_\varphi \in \mathcal{M}$. *Wówczas*

$$S(\rho + \varphi) \leqslant S(\rho) + S(\varphi)$$

zaś równość w powyższej nierówności ma miejsce wtedy i tylko wtedy gdy $h_\rho h_\varphi = 0$.

Zależność $h_\rho h_\varphi = 0$ jest równoważna $s(h_\rho)s(h_\varphi) = 0$ i $s(\rho)s(\varphi) = 0$, gdzie $s(h_\rho)$, $s(h_\varphi)$ są nośnikami macierzy gęstości stanów ρ i φ odpowiednio, zaś $s(\rho)$ i $s(\varphi)$ nośnikami stanów.

2.3 Entropia Segala dla stanów na produkcie tensorowym algebr von Neumanna

W pracy [O3] rozważany jest produkt tensorowy algebr von Neumanna $\mathcal{M}_1\bar{\otimes}\mathcal{M}_2\bar{\otimes}\mathcal{M}_3$. Jeżeli τ_1, τ_2, τ_3 są śladami półskończonymi, wiernymi na algebrach $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ odpowiednio, wówczas $\tau_{123} := \tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \tau_3$ jest półskończonym, wiernym śladem na $\mathcal{M}_1\bar{\otimes}\mathcal{M}_2\bar{\otimes}\mathcal{M}_3$.

Przez π_{ij} i π_i oznaczmy następujące, naturalne odpowiedniki śladów częściowych w $\mathbb{B}(\mathcal{H})$:

$$\pi_i\colon (\mathcal{M}_1\bar{\otimes}\mathcal{M}_2\bar{\otimes}\mathcal{M}_3)_* \to (\mathcal{M}_i)_*$$

$$\pi_{ij}\colon (\mathcal{M}_1\bar{\otimes}\mathcal{M}_2\bar{\otimes}\mathcal{M}_3)_* \to (\mathcal{M}_i\bar{\otimes}\mathcal{M}_j)_*, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

dane poprzez równości np. dla dowolnego stanu $\rho_{123} \in (\mathcal{M}_1\bar{\otimes}\mathcal{M}_2\bar{\otimes}\mathcal{M}_3)_*$ i $x_1 \in \mathcal{M}_1$

$$\pi_1(\rho_{123})(x_1) = \rho_{123}(x_1 \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) = \tau_{123}(h_{\rho_{123}}(x_1 \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1})) = \tau_1(h_{\rho_1} x_1) = \rho_1(x_1),$$

zaś dla $x_{12} \in \mathcal{M}_1\bar{\otimes}\mathcal{M}_2$

$$\pi_{12}(\rho_{123})(x_{12}) = \rho_{123}(x_{12} \otimes \mathbb{1}) = \tau_{123}(h_{\rho_{123}}(x_{12} \otimes \mathbb{1})) = \tau_{12}(h_{\rho_{12}} x_{12}) = \rho_{12}(x_{12}).$$

Ponadto $\rho_i := \pi_i(\rho_{123})$ oraz $\rho_{ij} := \pi_{ij}(\rho_{123})$.

Entropię Segala stanu $\rho_{123} \in (\mathcal{M}_1\overline{\otimes}\mathcal{M}_2\overline{\otimes}\mathcal{M}_3)_*$ definiujemy jako

$$S(\rho_{123}) = -\tau_{123}(h_{\rho_{123}} \log h_{\rho_{123}}).$$

Cytowana na początku rozdziału praca [O3] zawiera lemat 4 i propozycję 5, które uzasadniają sens i poprawność wyrażeń $\tau(h^{1/2} x h^{1/2})$ i $\tau(hx)$, gdzie τ jest śladem półskończonym na algebrze von Neumanna $\mathcal{M}$ zaś h i x samosprzężonymi, dodatnimi operatorami mierzalnymi, takimi, że $h \in L^1(\mathcal{M}, \tau)$, $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$. W uzasadnieniu udowodniona i wykorzystana została zależność graniczna

$$\lim_{\epsilon \to 0} \tau(h x_\epsilon) = \tau(hx),$$

gdzie $x_\epsilon = x(\mathbb{1} + \epsilon x)^{-1}$. Ponadto dowód propozycji odwołuje się do różnych form zbieżności operatorów mierzalnych i własności warunkowej wartości oczekiwanej udowodnionej przez Umegakiego w [6] w 1962 r.

Jako konsekwencję powyższych rozważań, w propozycji 6 [O3] zostało wykazane, że

$$\begin{aligned}
S(\rho_{12}) &= -\tau_{123}\Big(h_{\rho_{123}}^{1/2}\log(h_{\rho_{12}}\otimes\mathbb{1})h_{\rho_{123}}^{1/2}\Big),\\
S(\rho_{23}) &= -\tau_{123}\Big(h_{\rho_{123}}^{1/2}\log(\mathbb{1}\otimes h_{\rho_{23}})h_{\rho_{123}}^{1/2}\Big),\\
S(\rho_{1}) &= -\tau_{12}\Big(h_{\rho_{12}}^{1/2}\log(h_{\rho_{1}}\otimes\mathbb{1})h_{\rho_{12}}^{1/2}\Big),\\
S(\rho_{2}) &= -\tau_{12}\Big(h_{\rho_{12}}^{1/2}\log(\mathbb{1}\otimes h_{\rho_{2}})h_{\rho_{12}}^{1/2}\Big).
\end{aligned}$$

Hipoteza o silnej subaddytywności entropii, której dowód w ogólnym przypadku półskończonej algebry von Neumanna i entropii Segala jest głównym rezultatem opisywanej pracy, ma długą historię. Po raz pierwszy hipoteza ta została postawiona przez O.E. Lanforda i D.W.Robinsona w "Mean entropy of states in quantum statistical mechanics" w J.Math.Phys. w 1968 r. [5]. Dowód opublikowali w 1973 r. E.H.Lieb i M.B.Ruskai [7]. Twierdzenie zostało sformułowane dla przypadku pełnej algebry operatorów ograniczonych $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ ze śladem kanonicznym. Dowód opierał się na słynnej nierówności Lieba. Później pojawiły się różne uogólnienia tego twierdzenia oraz związanych z nim rezultatów i chociaż M.B. Ruskai postawiła hipotezę o silniej subaddytywności entropii dla ograniczonych macierzy gęstości algebry von Neumanna ze skończonym śladem [4], to aż do tej pory nawet ta teza nie doczekała się dowodu.

W pracy [O3] zostało udowodnione następujące twierdzenie, które wydaje się być w pewnym sensie ukoronowaniem historii hipotezy silnej subaddytywności entropii.

Twierdzenie 9 ([O3], Theorem 7)**.** *Niech $\rho_{123} \in (\mathcal{M}_1\overline{\otimes}\mathcal{M}_2\overline{\otimes}\mathcal{M}_3)_*$ będzie normalnym stanem z macierzą gęstości $h_{\rho_{123}} \in L^1(\mathcal{M}_1\overline{\otimes}\mathcal{M}_2\overline{\otimes}\mathcal{M}_3, \tau_{123})$ gdzie $\tau_{123} = \tau_1\otimes\tau_2\otimes\tau_3$ jest śladem półskończonym. Załóżmy, że $S(\rho_{123})$, $S(\rho_{12})$, $S(\rho_{23})$, $S(\rho_1)$ i $S(\rho_2)$ są skończone. Wówczas*

$$S(\rho_{123}) \leqslant S(\rho_{12}) + S(\rho_{23}) - S(\rho_2).$$

W dowodzie wykorzystane zostały: pojęcie informacji kwantowej uogólnionej przez Umegakiego w [6] oraz własność monotoniczności informacji kwantowej ze względu na normalne, całkowicie dodatnie, zachowujące jedność odwzorowanie $\alpha\colon \mathcal{M}_1\overline{\otimes}\mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_1\overline{\otimes}\mathcal{M}_2\overline{\otimes}\mathcal{M}_3$ dane równaniem $\alpha(x_{12}) = x_{12}\otimes\mathbb{1}$.

Prostą konsekwencją twierdzenia o silnej subaddytywności entropii okazała się własność subaddytywności entropii, tzn., że dla dowolnego stanu $\rho_{12} \in (\mathcal{M}_1 \bar{\otimes} \mathcal{M}_2)_*$ prawdziwa jest nierówność $S(\rho_{12}) \leqslant S(\rho_1) + S(\rho_2)$ [O3, Theorem 8]. Przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2$.

Rezultatem związanym z twierdzeniem o silnej subaddytywności entropii jest również jest również uogólniona nierówność Araki-Lieba:

Twierdzenie 10 ([O3], Theorem 10)**.** *Niech $\rho_{123} \in (\mathcal{M}_1 \overline{\otimes} \mathcal{M}_2 \overline{\otimes} \mathcal{M}_3)_*$ będzie normalnym stanem z macierzą gęstości $h_{\rho_{123}} \in L^1(\mathcal{M}_1 \overline{\otimes} \mathcal{M}_2 \overline{\otimes} \mathcal{M}_3, \tau_{123})$ gdzie $\tau_{123} = \tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \tau_3$ jest śladem półskończonym. Załóżmy, że $S(\rho_{123})$, $S(\rho_{12})$, $S(\rho_{23})$, $S(\rho_1)$ i $S(\rho_2)$ są skończone. Wówczas*

$$S(\rho_{123}) \leqslant S(\rho_{12}) + S(\rho_{23}) + \log \tau_2(h_{\rho_2}^2).$$

oraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 11 ([O3], Theorem 12)**.** *Niech $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ będą algebrami von Neumanna z półskończonymi śladami τ_1, τ_2 odpowiednio. Funkcja f dana wzorem*

$$f(\rho_{12}) = S(\rho_{12}) - S(\rho_2)$$

jest wklęsła na zbiorze normalnych stanów na $\mathcal{M}_1 \overline{\otimes} \mathcal{M}_2$.

2.4 Charakteryzacja stanów o maksymalnej entropii Segala

Jeżeli obserwable systemu fizycznego są reprezentowane przez ograniczone operatory z algebry $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, wówczas operator Hamiltona H (będący odpowiednikiem Hamiltonianu w mechanice klasycznej) jest samosprzężonym operatorem, którego wartości własne odpowiadają poziomom energetycznym systemu fizycznego znajdującego się w określonym stanie. Wartość oczekiwana energii systemu będącego w stanie ρ wyraża się wzorem

$$\rho(H) = \mathrm{tr}(h_\rho \cdot H).$$

Niech E należy do spektrum operatora H. Jednym z ważnych zadań mechaniki kwantowej jest scharakteryzowanie stanów systemu fizycznego, dla których wartość oczekiwana energii wynosi E tzn. takich stanów ρ, dla których $\rho(H) = E$. Klasyczny rezultat (dla algebry $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ ze śladem kanonicznym i dla entropii von Neumanna) mówi, że maksymalna wartość entropii dla takich stanów jest osiągana dla tzw. stanów Gibbsa, to jest dla stanów o macierzy gęstości $\frac{e^{\beta H}}{\mathrm{tr} e^{\beta H}}$ dla pewnej liczby rzeczywistej β.

Podobny wynik został udowodniony dla algebry von Neumanna ze śladem skończonym τ i entropii Segala S w pracy [O4].

Kluczową rolę w tych rozważaniach pełnił rezultat przedstawiony w następującym lemacie:

Lemat 12 ([O4], Lemma 1). *Niech h będzie samosprzężonym operatorem z algebry von Neumanna $\mathcal{M}$, takim, który nie jest wielokrotnością operatora identycznościowego, oraz niech f będzie funkcją zdefiniowaną w następujący sposób*

$$f(t) = \frac{\tau(he^{th})}{\tau(e^{th})}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wówczas funkcja f jest ściśle rosnąca.

Oznaczmy przez $\mathfrak{S}$ zbiór wszystkich stanów systemu fizycznego oraz dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zdefiniujmy stan Gibbsa ρ_t jako stan o macierzy gęstości $h_t = \frac{e^{th}}{\tau(e^{th})}$. Zbiór $\{\rho(h) : \rho \in \mathfrak{S}\}$ jest zawarty w przedziale $[\lambda_m, \lambda_M]$, gdzie $\lambda_m = \min\{\lambda : \lambda \in^h\}, \qquad \lambda_M = \max\{\lambda : \lambda \in^h\}$.

Ponadto jeżeli dla pewnego stanu Gibbsa ρ_β mamy $\rho_\beta(h) = \lambda_m$ lub $\rho_\beta(h) = \lambda_M$, wówczas $h = \lambda_m \mathbb{1}$ lub $h = \lambda_M \mathbb{1}$ odpowiednio. Ta obserwacja pokazuje, że dla stanów Gibbsa $\rho_\beta(h) \neq \lambda_m$ i $\rho_\beta(h) \neq \lambda_M$.

Okazuje się, że jeśli $E \in (\lambda_m, \lambda_M)$ wówczas istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista β taka, że dla stanu Gibbsa ρ_β spełnione jest

$$\rho_\beta(h) = E.$$

Głównym wynikiem przedstawianym w omawianej pracy [O4] jest rezultat analogiczny do uzyskanego dla entropii von Neumanna:

Twierdzenie 13 ([O4], Theorem 1). *Niech h będzie Hamiltonianem w algebrze von Neumanna $\mathcal{M}$ i niech $E \in (\lambda_m, \lambda_M)$ będzie dowolną liczbę rzeczywistą. Wówczas istnieje dokładnie jedna liczba $\beta \in \mathbb{R}$ taka, że*

$$\sup\{S(\rho) : \rho \in \mathfrak{S},\, \rho(h) = E\} = S(\rho_\beta);$$

tzn. maksymalna wartość entropii Segala, dla stanów, w których system fizyczny znajduje się na ustalonym poziomie energetycznym, jest osiągana dla stanu Gibbsa. Co więcej ten stan Gibbsa jest jedynym stanem o maksymalnej entropii.

Pokazane zatem zostało, że dla dowolnej algebry von Neumanna $\mathcal{M}$ z normalnym skończonym śladem τ, stanem, który maksymalizuje entropię Segala na ustalonym poziomie energetycznym, jest jedyny stan Gibbsa ρ_β zdefiniowany dla $\beta \in \mathbb{R}$ wzorem

$$\rho_\beta(x) = \tau\left(x \frac{e^{\beta h}}{\tau\left(e^{\beta h}\right)}\right), \quad x \in \mathcal{M},$$

gdzie h jest pewnym, ustalonym, samosprzężonym operatorem z algebry $\mathcal{M}$.

2.5 Entropia pomiaru kwantowego

Teoria pomiaru kwantowego jest ściśle związana z pojęciem instrumentu wprowadzonym przez E. Davies'a i J. Lewis'a w latach 70-tych. Instrument jest bowiem bardzo dobrym narzędziem matematycznym służącym do opisu procesu pomiaru kwantowego. Jeżeli przez $(\Omega, \mathcal{F})$ oznaczymy przestrzeń mierzalną wartości obserwabli systemu fizycznego, wówczas instrumentem będziemy nazywać odwzorowanie $\mathcal{E} \colon \mathcal{F} \to \mathfrak{L}^+(\mathcal{M}_*)$ określone na σ ciele $\mathcal{F}$ w przestrzeni wszystkich liniowych, dodatnich odwzorowań preduala $\mathcal{M}_*$ w siebie, takie że

(i) $(\mathcal{E}_\Omega \varphi)(\mathbb{1}) = \varphi(\mathbb{1})$ dla wszystkich $\varphi \in \mathcal{M}_*$, oraz

(ii) $\mathcal{E}_{\bigcup_{n=1}^\infty \Delta_n} \varphi = \sum_{n=1}^\infty \mathcal{E}_{\Delta_n} \varphi$ dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{M}_*$ i parami rozłącznych zbiorów $\Delta_n \in \mathcal{F}$, gdzie szereg po prawej stronie jest zbieżny w σ-słabej topologii na $\mathcal{M}$.

W teorii pomiaru kwantowego, $\mathcal{E}_\Omega \varphi$ reprezentuje stan systemu po pomiarze, jeżeli przed pomiarem system fizyczny był w stanie φ. W terminologii teorii informacji instrument $\mathcal{E}_\Omega$ nazywany jest kanałem kwantowym, zaś odwzorowanie $\mathcal{E}_\Delta$ niepełnym kanałem (ponieważ $\mathcal{E}_\Delta \varphi$ jest dodatnim, normalnym funkcjonałem, ale nie musi być funkcjonałem unormowanym tzn. $(\mathcal{E}_\Delta \varphi)(\mathbb{1})$ może być różne od 1).

Z każdym odwzorowaniem $\mathcal{E}_\Delta$ można związać jego odwzorowanie dualne $\mathcal{E}_\Delta^* \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ zdefiniowane jako

$$\varphi(\mathcal{E}_\Delta^*(x)) = (\mathcal{E}_\Delta(\varphi))(x).$$

Ze względu na różne właściwości instrumentów wyróżnia się różne ich klasy, np. znana hipoteza von Neumanna, która brzmi "Jeśli pewna wielkość fizyczna systemu jest mierzona dwa razy po kolei, to otrzymamy tę samą wartość za każdym razem" była impulsem do zdefiniowania klasy instrumentów słabo powtarzalnych i powtarzalnych.

Każde skończone rozbicie przestrzeni $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$ na mierzalne i parami rozłączne zbiory nazywamy skalą odczytu pomiaru. Stan końcowy systemu (po pomiarze) może być zatem przedstawiony w następujący sposób:

$$\mathcal{E}_\Omega \rho = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{\Delta_i} \rho = \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{E}_{\Delta_i} \rho)(\mathbb{1}) \cdot \frac{\mathcal{E}_{\Delta_i} \rho}{(\mathcal{E}_{\Delta_i} \rho)(\mathbb{1})} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i,$$

gdzie ρ_i są stanami normalnymi zaś $\alpha_i > 0$ i $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Istotnym wynikiem przedstawionym w pracy [O2] jest twierdzenie o ograniczeniu entropii Segala stanu końcowego systemu fizycznego.

Twierdzenie 14 ([O2], Theorem 12)**.** *Niech $\mathcal{M}$ będzie algebrą von Neumanna z normalnym, wiernym i skończonym stanem τ. Dla każdego normalnego stanu ρ, takiego, że $\mathcal{E}_\Omega \rho$ ma ograniczoną macierz gęstości mamy*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(\rho_i) \leqslant S(\mathcal{E}_\Omega \rho) \leqslant \sum_{i=1}^{n} S(\rho_i) + S((\alpha_i)), \tag{1}$$

gdzie

$$S((\alpha_i)) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log \alpha_i$$

zaś $\mathcal{E}$ reprezentuje pomiar systemu fizycznego znajdującego się w stanie początkowym ρ.

Pomiar reprezentowany przez instrument $\mathcal{E}$ będziemy nazywać pomiarem o maksymalnej entropii jeżeli dla dowolnego stanu ρ i dowolnej skali odczytu $S(\mathcal{E}_\Omega \rho) = \sum_{i=1}^{n} S(\rho_i) + S((\alpha_i))$.

Główne rezultaty pracy [O2] dają charakteryzację pomiaru (instrumentu) o maksymalnej entropii i przedstawione są w następujących twierdzeniach.

Twierdzenie 15 ([O2], Theorem 14)**.** *Pomiar, który jest reprezentowany przez instrument słabo powtarzalny jest pomiarem o maksymalnej entropii.*

oraz

Twierdzenie 16 ([O2], Theorem 15)**.** *Jeżeli instrument $\mathcal{E}$ ma tę własność, że odwzorowanie $e\colon \mathcal{F} \to \mathcal{M}$, dane wzorem $e(\Delta) = \mathcal{E}^*_\Delta(\mathbb{1})$, jest miarą spektralną, wówczas następujące warunki są równoważne*

(i) $\mathcal{E}^*_\Omega = \mathcal{E}^{*2}_\Omega$, i $\mathcal{E}$ jest pomiarem o maksymalnej entropii;

(ii) $\mathcal{E}$ jest powtarzalny.

2.6 Ograniczenia typu Holevo dla różnych miar zależności stanów mierzonego systemu fizycznego

Niech dana będzie algebra von Neumanna $\mathcal{M}$ ze śladem wiernym skończonym τ reprezentująca (ograniczone) obserwable systemu fizycznego. Niech $\rho_1, \rho_2, ...$ będą normalnymi stanami z preduala $\mathcal{M}_*$. Zakładamy, że system fizyczny może znajdować się w stanie ρ_i z prawdopodobieństwem a priori $\pi_i, i = 1, 2, ...$, gdzie $\pi = (\pi_1, \pi_2, ...)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa. System poddany jest pomiarowi (strategii) M, przez który rozumiemy ciąg $(M_1, M_2, ...)$ dodatnich operatorów z algebry M, takich, że $\sum_{i=1}^{\infty} M_i = \mathbb{1}$, gdzie szereg jest zbieżny w słabej operatorowej topologii na $\mathcal{M}$. Jeśli wynikiem pomiaru jest M_i, wówczas wybieramy stan ρ_i. Prawdopodobieństwo, że system jest w stanie ρ_i, podczas gdy wynik pomiaru jest M_j wynosi $\rho_i(M_j)$. Zatem $\rho_i(M_j)$ jest prawdopodobieństwem poprawnego wybrania stanu ρ_i. Zadanie informacji kwantowej polega na znalezieniu zależności pomiędzy stanem, w którym system się rzeczywiście znajduje a wynikiem pomiaru.

Oznaczmy przez X liczbę stanów, w których znajduje się system fizyczny oraz przez Y liczbę otrzymanych wyników pomiarów. Wektor losowy (X, Y) ma następujący rozkład:

$$P(X = i, Y = j) = \pi_i \rho_i(M_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Zadanie polega na wskazaniu, w optymalny sposób, takiego pomiaru aby zmienne losowe X i Y były jak najbardziej zależne. W pracy [O5] rozważane są 3 metody:

1. maksymalizacja, względem pomiaru, informacji wzajemnej (mutual information)
$$I(\rho, M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(i,j) \log \frac{p(i,j)}{p(i,\cdot)p(\cdot,j)},$$

2. maksymalizacja, względem pomiaru, funkcji
$$d_f(\rho, M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(p(i,j) - p(i,\cdot)p(\cdot,j)),$$

   dla wszystkich nieujemnych, wypukłych funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takich, że $f(0) = 0$,

3. minimalizacja, względem pomiaru, wierności rozkładów

$$F(\rho, M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sqrt{p(i,j)} \sqrt{p(i,\cdot)p(\cdot,j)}$$

gdzie $p(i,j) = \pi_i \rho_i(M_j)$ jest rozkładem łącznym wektora(X,Y), zaś $p(i,\cdot) = \pi_i$ i $p(\cdot,j) = \sum_i \pi_i \rho_i(M_j)$ rozkładami brzegowymi zmiennych X i Y.

W literaturze można spotkać rozważania dotyczące metody 1. w przypadku $(\mathbb{B}(\mathcal{H}), \mathrm{tr})$ oraz metody 2. dla funkcji $f(t) = \frac{1}{2}t^2$.

Ad. 1. Wartość $\max_M I(\rho, M)$ w teorii informacji kwantowej jest nazywana informacją dostępną (accesible information) i oznaczana jest przez I_{acc}. W przypadku klasycznym, tzn, dla $\mathcal{M} = \mathbb{B}(\mathcal{H}),\ \rho = \mathrm{tr}$ i entropii von Neumanna znane jest twierdzenie Holevo, którego teza dotyczy ograniczenia z góry informacji dostępnej przez tzw. wartość Holevo χ:

$$I_{acc} \leqslant \chi = H(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \rho_i) - \sum_{i=1}^{n} \pi_i H(\rho_i)$$

gdzie H - entropia von Neumanna.

W pracy [O5] twierdzenie to zostało uogólnione na przypadek systemu fizycznego opisywanego przez dowolną skończoną algebrę von Neumanna z wykorzystaniem entropii Segala.

Kluczowym punktem w dowodzie uogólnionego twierdzenia Holevo jest wykorzystanie własności silnej subaddytywności entropii Segala. Artykuł [O5] zawiera dowód tej własności (inny niż w przypadku półskończonej algebry $\mathcal{M}$) bazujący na uogólnionym twierdzeniu Goldena - Thompsona i operatorowej wklęsłości funkcji $f\colon T \to \tau(\exp(V + \log T))$ dla $V = V^*,\quad T, V \in \mathcal{M}$, τ-skończonego śladu, oraz na nietrywialnych własnościach entropii Segala (przedstawionych w poprzednich rozdziałach).

Uogólnione twierdzenie Holewo ma postać

Twierdzenie 17 ([O5], Theorem 1)**.** *Niech $\mathcal{M}$ będzie algebrą von Neumanna ze skończonym wiernym śladem τ. Niech $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n), \pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ oznaczają jak poprzednio. Załóżmy, że dla każdego i $h_{\rho_i} \in \mathcal{M}$. Wówczas*

$$I_{acc} \leqslant S\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \rho_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \pi_i S(\rho_i),$$

gdzie $S(\rho)$ oznacza entropię Segala stanu ρ.

Ad.2. Druga metoda polega na maksymalizacji tzw. odległości funkcyjnej d_f przez analogię do dywergencji Kullbacka-Leiblera. Dla rozkładów prawdopodobieństwa $p = (p_i)$ i $q = (q_i)$ definiujemy

$$d_f(p||q) = \sum f(p_i - q_i)$$

lub w postaci ogólniejszej

$$d_f(a||b) = \tau(f(a - b))$$

gdzie $a, b \in \mathcal{M}$ np. macierze gęstości stanów.

Udowodnione w pracy [O5] twierdzenie podaje górne ograniczenie odległości funkcyjnej pomiędzy rozkładem łącznym i rozkładem brzegowym wektora losowego (X, Y):

Twierdzenie 18 ([O5], Theorem 2)**.** *Niech $(\mathcal{M}, \tau)$ będzie algebrą von Neumanna ze śladem normalnym wiernym i takim, że $\tau(\mathbb{1}) = 1$ oraz niech f będzie ciągłą, wypukłą, dodatnią funkcją, taką, że $f(0) = 0$. $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ jest stanem takim, że $h_{\rho_i} \in \mathcal{M}$, zaś $M = (M_1, M_2, \ldots, M_m)$ jest pomiarem. Wtedy*

$$\max_M d_f(\rho, M) \leqslant \sum_i d_f\left(\pi_i h_{\rho_i} || \pi_i \left(\sum_k \pi_k h_{\rho_k}\right)\right).$$

Twierdzenie to jest również prawdziwe w przypadku algebry półskończonej i szerszej klasy stanów tzn. takich, których macierze gęstości są elementami przestrzeni $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ i dla konkretnej funkcji f, tzn. $f(x) = |x|$. $d_{|\cdot|}(\rho, M)$ nazywa się wówczas total variation distance (VD). Co więcej $\max_M d_{|\cdot|}(\rho, M) \leqslant \sum_{i=1}^n \pi_i d_{|\cdot|}\left(h_{\rho_i} || h_\varphi\right)$, gdzie $\varphi = \sum_i \pi_i \rho_i$, $d_{|\cdot|}(a||b) = \tau(|a - b|)$.

Ad.3. Analiza trzeciej metody polegającej na znalezieniu takiego pomiaru M, dla którego wierność

$$F(\rho, M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sqrt{\pi_i \rho_i(M_j)} \sqrt{\pi_i \sum_{k=1}^n \pi \rho_k(M_j)}$$

jest minimalna pozwala wskazać wartość ograniczającą $\min_M F(\rho, M)$ z dołu, tzn.

Twierdzenie 19 ([O5], Theorem 4)**.** *Istnieje ograniczenie dolne*

$$\min_M F(\rho, M) \geqslant \sum_{i=1}^n \pi_i F\left(h_{\rho_i}, h_\varphi\right), \tag{2}$$

gdzie $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \rho_i$ *i* $F(a,b) = \tau\left(\sqrt{a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}}}\right)$ *dla* $a, b \geqslant 0, a, b \in \mathcal{M}$.

3 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze niewchodzące w cykl osiągnięcia naukowego

[P6] H. Podsędkowska *A Linear Theory of Instruments on von Neumann Algebras* Journal of Mathematical Sciences 2001 **106** (1), 2742-2746

[P7] H. Podsędkowska *Correlations in a general theory of quantum measurement* Open Systems & Information Dynamics 2007 **14** (04), 445-458

[P8] K. Lubnauer, A Łuczak, H Podsędkowska *Weak sufficiency of quantum statistics* Reports on Mathematical Physics 2007 **60** (3), 367-380

[P9] K. Lubnauer, A. Łuczak, H. Podsędkowska *Weakly sufficient quantum statistics* Mathematica Slovaca 2011 **61** (6), 959-978

[P10] K. Lubnauer, H. Podsędkowska, *State Determination and Sufficiency of Observables* International Journal of Theoretical Physics 2013 **53** (10) 3262-3272

[P11] A. Łuczak, H. Podsędkowska *Lüders Instruments, Generalised Lüders Theorem, and Some Aspects of Sufficiency* International Journal of Theoretical Physics 2015 **54** (12) 4283-4292

[P12] K. Lubnauer, A. Łuczak, H. Podsędkowska, *Generalised Lüders Operation for Normal States on a Von Neumann Algebra* Fixed Point Theory 2018 **19** (1) 301-320

[P13] K. Lubnauer, H. Podsędkowska, *Cloning and Entropy in Von Neumann Algebras* Bulletin de la Société des sciences et des lettres de Łódź, Série: Recherches sur les deformations 2015.

[P14] R. Wieczorek, H. Podsędkowska. *Entropic upper bound for Bayes risk in the quantum case* Probability and Mathematical Statistics 2018 **38** (2) 429-440

[P15] A. Łuczak, H. Podsędkowska, R. Wieczorek *Relative and quasi-entropies in semifinite von Neumann algebras* Reviews in Mathematical Physics 2023, **35** (02)

[P16] Ł. Andrzej, H. Podsędkowska. *Mappings Preserving Segal's Entropy in Von Neumann Algebras* Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Mathematica 2019 **44** (2)

3.1 Pomiar kwantowy, teoria instrumentów, operacje Lüdersa

Instrument jest odwzorowaniem opisującym zmianę stanu systemu fizycznego spowodowaną pomiarem obserwabli. Pojęcie instrumentu zostało wprowadzone przez E.B. Daviasa i J.T. Lewisa w 1970 r. w klasycznym ujęciu mechaniki kwantowej, w którym obserwable systemu są reprezentowane przez operatory ograniczone na przestrzeni Hilberta, a stany przez operatory śladowe. Podejście to zostało uogólnione do dowolnej algebry von Neumanna $\mathcal{M}$ i jej preduala $\mathcal{M}_*$. Wyniki przedstawione w pracy [P6] zawierają odpowiednie definicje i własności instrumentu na algebrze von Neumanna. Wykazana została wzajemnie jednoznaczna zależność między instrumentem $\mathcal{E}$ i dwuliniowym dodatnim odwzorowaniem $\overline{\mathcal{E}}\colon C_{\mathbb{R}}(\Omega) \times \mathcal{M}_* \to \mathcal{M}_*$. Twierdzenie to jest odpowiednikiem znanej w klasycznej teorii zależności pomiędzy funkcjonałem liniowym i miarą.

Powyższa teoria instrumentów została rozszerzona i wykorzystana w pracy [P7], która dotyczy badania korelacji w procesie pomiaru kwantowego. System fizyczny wraz z aparatem pomiarowym tworzą układ, którego obserwable są elementami iloczynu tensorowego algebr $\mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{N}$, gdzie algebry von Neumanna $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ związane są z systemem i aparatem odpowiednio. Pomiar kwantowy opisuje normalne dodatnie odwzorowanie $\alpha\colon \mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{N} \to \mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{N}$. Stan początkowy układu $\varphi \otimes \psi$, gdzie $\varphi \in \mathcal{M}_*$ i $\psi \in \mathcal{N}_*$, w wyniku pomiaru ulega przekształceniu w stan $\alpha_*(\varphi \otimes \psi)$, gdzie $\alpha_*\colon \mathcal{M}_*\overline{\otimes}\mathcal{N}_* \to \mathcal{M}_*\overline{\otimes}\mathcal{N}_*$, $(\alpha_*(\rho))(z) = \rho(\alpha(z))$, $z \in \mathcal{M}\overline{\otimes}\mathcal{N}$. Przy użyciu odwzorowania α_* zostały zdefiniowane miary prawdopodobieństwa

$$\mu^{\varphi,G}(E \times F) = \alpha_*(\varphi \otimes \psi)(h_{e(G)}(E) \otimes h_{p(G)}(F)), \quad E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

gdzie $h_{e(G)}$ i $h_{p(G)}$ to miary spektralne obserwabli systemu i aparatu odpowiednio, oraz

$$\nu(E \times F) = \alpha_*(\varphi \otimes \psi)(e(E) \otimes p(F)), \quad E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

gdzie e jest obserwablą systemu a p obserwablą aparatu.

Głównymi rezultatami pracy [P7] są twierdzenia charakteryzujące związek typu pomiaru (instrumentu) z momentami miar brzegowych $\mu^{\varphi,G}$ i ν oraz badające korelacje pomiędzy tymi miarami brzegowymi.

Praca [P12] przedstawia wyniki badań nad szczególnym pomiarem kwantowym, tzn. nad uogólnionym pomiarem Lüdersa.

Niech $\mathcal{M}$ będzie półskończoną algebrą von Neumanna, zaś $\{a_i\}$ przeliczalną rodziną operatorów z $\mathcal{M}$ taką, że $\sum_i a_i^* a_i = 1$ i $\sum_i a_i a_i^* = 1$, gdzie oba szeregi są zbieżne w σ-słabej topologii na $\mathcal{M}$. Uogólnionym pomiarem Lüdersa nazywamy odwzorowanie $\Phi_*\colon \mathcal{M}_* \to M_*$ dane wzorem

$$\Phi_*(\rho) = \sum_i a_i \rho a_i^*, \quad \rho \in \mathcal{M}_*,$$

gdzie szereg jest zbieżny w topologii normowej.

Odwzorowaniem dualnym do Φ_* jest odwzorowanie $\Phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ takie, że

$$\Phi(x) = \sum_i a_i^* x a_i, \quad x \in \mathcal{M},$$

gdzie szereg jest zbieżny w σ-słabej topologii.

Odwzorowanie Φ zachowuje ślad, tzn.

$$\tau(\Phi(h)) = \tau(h), \quad h \in \mathcal{M}.$$

Zbiór punktów stałych odwzorowania Φ i Φ_* oznaczamy przez

$$\mathrm{Fix}\Phi = \{x \in \mathcal{M}\colon \Phi(x) = x\}$$

$$\mathrm{Fix}\Phi_* = \{\rho \in \mathcal{M}_*\colon \Phi_*(\rho) = \rho\}$$

odpowiednio.

Główne wyniki omawianej pracy dotyczą charakteryzacji zbioru punktów Φ oraz Φ_*. Dla algebry von Neumanna $\mathcal{M}$ z półskończonym śladem τ $\mathrm{Fix}\Phi_* = \mathcal{M}_* \cap \mathcal{A}'$, gdzie $\mathcal{A} = W^*(\{a_i\})$ jest algebrą von Neumanna generowaną przez wszystkie a_i, zaś $\mathcal{M}_* \cap \mathcal{A}' = \{\rho \in \mathcal{M}_*\colon a\rho = \rho a, a \in \mathcal{A}\}$.

Związek między równością $\mathrm{Fix}\Phi_* = \mathcal{M}_* \cap \mathcal{A}'$ a równością dualną $\mathrm{Fix}\Phi = \mathcal{M} \cap \mathcal{A}'$ nie jest jasny. Nawet w przypadku, gdy $a_i = a_i^*$ i tej samej formy Φ_* i Φ są sytuacje, gdy prawdziwa jest tylko jedna z równości i takie, w których prawdziwe są dwie. W pracy zostały przedstawione i omówione odpowiednie przykłady ilustrujące powyższe rozważania.

3.2 Dostateczność obserwabli oraz algebr von Neumanna generowanych przez statystyki kwantowe

Idea dostateczności statystyki kwantowej w ujęciu niekomutatywnym pochodzi od H. Umegakiego i w kontekście omawianych prac [P8, P9, P10, P11] ma następującą formę:

Niech samosprzężony operator T o rozkładzie spektralnym $T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e(d\lambda)$ będzie statystyką kwantową. $\mu_\varphi(\cdot) = \langle e(\cdot)\varphi, \varphi\rangle$ jest rozkładem prawdopodobieństwa. Rozważmy rodzinę stanów $\varphi_\theta, \theta \in \Theta$ reprezentującą wszystkie możliwe stany systemu kwantowego, z których chcemy "wybrać" ten "prawdziwy".

Niech $\mathcal{N} = W^*(T)$. Mówimy, że statystyka T jest dostateczna dla rodziny $\{\varphi_\theta, \theta \in \Theta\}$ (lub równoważnie algebra $\mathcal{N}$ jest dostateczna), jeżeli istnieje normalna warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ taka, że dla dowolnego $\theta \in \Theta$ i $x \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$

$$\langle \mathbb{E}(x)\varphi_\theta, \varphi_\theta\rangle = \langle x\varphi_\theta, \varphi_\theta\rangle$$

tzn. stany φ_θ są $\mathbb{E}$ niezmiennicze.

Statystykę T nazywamy słabo-dostateczną dla rodziny stanów $\{\varphi_\theta, \theta \in \Theta\}$ jeżeli istnieje funkcja borelowska $\Phi_\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz wektor jednostkowy $\chi \in \mathcal{H}$ takie, że dla wszystkich $\theta \in \Theta$, $c \cdot \varphi_\theta = \Phi_\theta(T)\chi$, tzn. wszystkie stany φ_θ można otrzymać przy pomocy funkcji statystyki T. Głównym zadaniem rozwiązanym w pracy [P8] było podanie warunków charakteryzujących słabą dostateczność T dla $\{\varphi_\theta\}$ tzn. T jest słabo dostateczna dla $\{\varphi_\theta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rzut $p' \in \mathcal{N}'$ taki, że $\{\varphi_\theta\} \subset p'\mathcal{H}$ oraz $\mathcal{N}_{p'} = \{xp' \mid p'\mathcal{H}\colon x \in \mathcal{M}\}$ jest maksymalną abelową algebrą i dla $\theta', \theta'' \in \Theta$ istnieją c_1, c_2 - stałe zespolone takie, że dla każdego zbioru borelowskiego $E \subset \mathbb{R}$ $\langle e(E)c_1\varphi_{\theta'}, c_2\varphi_{\theta''}\rangle \in \mathbb{R}$.

Podobna charakteryzacja została podana także dla przypadku dyskretnego, tzn. dla $T = \sum_k \lambda_k e_k$.

W pracy [P9] przyjęto nieco "słabszą" definicję statystyki kwantowej T, a mianowicie warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ gdzie $\mathcal{N} = W^*(T)$, została zastąpiona przez normalne dwudodatnie odwzorowanie α takie, że $\alpha(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. T jest nazywana dostateczną dla rodziny stanów $\{\varphi_\theta\colon \theta \in \Theta\}$ (które nie muszą być stanami wektorowymi), jeżeli dla każdego $\theta \in \Theta$

$$\varphi_\theta \circ \alpha = \varphi_\theta.$$

Definicja słabej dostateczności jest analogiczna jak w pracy [P8]. W [P9] został podany warunek istnienia słabodostatecznej statystyki kwantowej. Ponadto przedstawiono rozważania dotyczące statystyki S minimalnej względem słabodostatecznej statystyki T, tzn. takiej, że dla każdej słabodostatecznej statystyki U przyłączonej do algebry $\mathcal{N} = W^*(T)$ istnieje rzeczywista funkcja borelowska Ψ taka, że $S = \Psi(U)$. Podano warunek dostateczny i wystarczający istnienia minimalnej statystyki względem dyskretnej słabodostatecznej statystyki T. Druga część pracy poświęcona jest badaniom zależności między dostatecznością i słabą dostatecznością. W ostatnim twierdzeniu sformułowany jest naturalny związek: jeżeli statystyka T jest dostateczna dla rodziny stanów $\{\varphi_\theta, \theta \in \Theta\}$ i $\alpha(\mathbb{B}(\mathcal{H})) = \mathcal{N}$ wówczas T jest również słabodostateczna.

Stan ρ nazywamy zdeterminowanym przez miarę półspektralną e, jeżeli dla dowolnego stanu φ mamy:

$$\underset{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}{\forall} \rho(e(\Delta)) = \varphi(e(\Delta)) \Rightarrow \rho = \varphi.$$

Dla miary półspektralnej e równość $\rho(e(\Delta)) = \varphi(e(\Delta))$ ustala relację równoważności $\rho \sim \varphi \iff \underset{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}{\forall} \rho(e(\Delta)) = \varphi(e(\Delta))$.

Klasę abstrakcji oznaczamy $[\rho]_e$.Zatem dla stanu zdeterminowanego przez miarę półspektralną mamy

$$[\rho]_e = \{\rho\}.$$

W artykule [P10], kontynuując badania dostateczności, postawiono dwa pytania: kiedy W^* algebra generowana przez miarę spektralną lub półspektralną e jest dostateczna dla rodziny D_e stanów zdeterminowanych przez e oraz jaka jest charakteryzacja zbioru stanów $D_\mathcal{N}$ zdeterminowanych przez W^* algebrę $\mathcal{N}$. W szczególności rozważano kiedy klasa $[\rho]_\mathcal{N}$ składa się tylko z jednego elementu.

Udowodniono, że podalgebra $\mathcal{N} = W^*(e)$, generowana przez randomizowalną półspektralną miarę e, jest dostateczna dla rodziny stanów D_e.

Własności dostateczności operatorów należących do algebry von Neumanna dla pewnych rodzin stanów stały się również przedmiotem rozważań w przypadku kwantowych pomiarów Lüdersa w artykule [P11]

Niech $\Omega = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ zaś (e_n) będzie dyskretną miarą spektralną na Ω, tzn. $e(\{\lambda_n\}) = e_n$. Pomiar (instrument) Lüdersa jest zdefiniowany przez formułę:

$$\mathcal{E}_\Delta \varphi = \sum_{\lambda_n \in \Delta} e_n \varphi e_n, \quad \varphi \in \mathcal{M}_*, \quad \Delta \subset \Omega$$

gdzie $(e_n \varphi e_n)(x) = \varphi(e_n x e_n), \quad x \in \mathcal{M}$, a w języku instrumentu dualnego

$$\mathcal{E}^*_\Delta(x) = \sum_{\lambda_n \in \Delta} e_n x e_n, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Oczywiście uogólnione odwzorowanie Lüdersa $\Phi = \mathcal{E}^*_\Omega$ oraz $\mathrm{Fix}\Phi = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}'$.

Obserwablą stowarzyszoną z instrumentem $\mathcal{E}$ nazywamy miarę spektralną e taką, że $e(\Delta) = \mathcal{E}^*_\Omega(\mathbb{1}),\ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wtedy $\mathcal{N} = W^*(e)$.

Jeżeli dyskretny instrument $\mathcal{E}$ ma obserwablę stowarzyszoną e będącą miarą spektralną, wówczas równoważne są stwierdzenia:

(i) $\mathcal{E}$ jest idealny

(ii) $\mathcal{E}$ jest silnie powtarzalny

(iii) $\mathcal{E}$ jest Lüdersa.

Ten wynik zaprezentowany w [P11] pozwolił w konsekwencji wykazać uogólnione twierdzenie Lüdersa, a mianowicie, że dla idealnego instrumentu $\mathcal{E}$ z obserwablą stowarzyszoną będącą miarą spektralną

$$\mathrm{Fix}\mathcal{E}^*_\Omega = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}'.$$

Ponadto $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}'$ jest algebrą dostateczną dla rodziny stanów D_e zdefiniowanych przez e. Powyższe stwierdzenie jest również prawdziwe dla instrumentu silnie powtarzalnego.

3.3 Instrumenty nie zmieniające entropii stanu i klonowanie

Pomiar systemu fizycznego, którego obserwable są reprezentowane przez operatory ograniczone należące do półskończonej algebry von Neumanna powoduje zmianę stanu tego systemu. W artykule [P16] badano, jakie warunki musi spełniać instrument reprezentujący pomiar, aby entropia Segala stanu początkowego układu fizycznego nie została zmieniona w wyniku pomiaru. Udowodniono, że jeżeli $\mathcal{E}$ jest instrumentem działającym na algebrze von Neumanna $\mathcal{M}$ z półskończonym wiernym śladem τ i $\tau \circ \mathcal{E}^*_\Omega = \tau$, wówczas dla dowolnego stanu $\rho \in \mathcal{M}^+_*$ o skończonej entropii Segala S

$$S(\mathcal{E}_\Omega \rho) \geqslant S(\rho).$$

Jeśli instrument jest powtarzalny wówczas $S(\mathcal{E}_\Omega \rho) = S(\rho)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathcal{E}_\Omega \rho = \rho.$$

Badania prowadzące do tego wyniku zaowocowały wieloma ciekawymi twierdzeniami dotyczącymi operatorów nieograniczonych. Między innymi wykazano, że funkcja $f(t) = t \log t$, dla $t \in [0, +\infty)$, jest ściśle operatorowo wypukła na zbiorze dodatnich, samosprzężonych operatorów mierzalnych. Znaczącym twierdzeniem jest również, uogólniona na operatory nieograniczone, operatorowa nierówność Jensena.

Dla dodatniego, zachowującego jedność odwzorowania $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, które ma rozszerzenie do $L^1(M, \tau)$, ograniczone względem normy $\|\cdot\|_1$ i dla stanu $\rho \in \mathcal{M}_*^+$, mającego skończoną entropię Segala, zachodzi nierówność Jensena

$$\alpha(h_\rho \log h_\rho) \geqslant \alpha(h_\rho) \log \alpha(h_\rho).$$

Oprócz badania zmiany entropii stanu systemu fizycznego podlegającego pomiarowi w [P13] badano również własności klonowania stanu końcowego w zależności od własności "entropijnych" instrumentu. Uzyskano następujące rezultaty:

1. Słabopowtarzalny instrument $\mathcal{E}$, tzn. taki, że dla każdych mierzalnych zbiorów Δ_1, Δ_2 mamy $\mathcal{E}^*_{\Delta_1}(\mathcal{E}^*_{\Delta_2}(\mathbb{1})) = \mathcal{E}^*_{\Delta_1 \cap \Delta_2}(\mathbb{1})$, przekształca stan początkowy ρ systemu fizycznego do stanu $\mathcal{E}^*_\Omega \rho$, który może być transmitowany przez ten sam kanał K_*, który klonuje rodzinę

   $$T = \{\rho_i\colon \quad i = 1, 2, \dots\}$$

   jeśli $K_*\colon \mathcal{M}_* \to (\mathcal{M} \overline{\otimes} \mathcal{M})_*$, to mówimy, że $\rho \in \mathcal{M}_*$ jest transmitowane przez K_*, jeżeli dla każdego $x \in \mathcal{M}$

   $$\rho(K(x \otimes \mathbb{1})) = \rho(K(\mathbb{1} \otimes x)) = \rho(x),$$

   oraz $\rho \in \mathcal{M}_*$ jest klonowane przez K_*, jeżeli $K_*(\rho) = \rho \otimes \rho$.

2. Jeżeli instrument $\mathcal{E}$ reprezentuje pomiar o minimalnej entropii stanu, wówczas kanał, który klonuje rodzinę stanu $T = \{\rho_i\colon \quad i = 1, 2, \dots\}$ i transmituje stan końcowy $\mathcal{E}^*_\Omega \rho$ ma postać

   $$K_*(\varphi) = \sum_i \varphi(\sup(\mathcal{E}^*_{\Delta_i})) \frac{\mathcal{E}_{\Delta_i}}{\mathcal{E}_{\Delta_i}\rho(\mathbb{1})} \otimes \frac{\mathcal{E}_{\Delta_i}}{\mathcal{E}_{\Delta_i}\rho(\mathbb{1})}.$$

3.4 Entropijne ograniczenie ryzyka Bayesowskiego

W pracy [P14] rozważano system fizyczny, którego obserwable są operatorami ograniczonymi należącymi do algebry von Neumanna $\mathcal{M}$ ze śladem skończonym τ. Przyjęto, że stany systemu $\rho_1, \rho_2, \ldots$ mogą być przyjmowane z prawdopodobieństwem a priori $\pi_1, \pi_2 \ldots$, gdzie $\Pi = (\pi_1; \pi_2, \ldots)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa. Przez strategię (pomiar) M działającą na system rozumiemy ciąg $(M_1, M_2, \ldots)$ dodatnich operatorów na $\mathcal{M}$ takich, że $\sum_i M_i = \mathbb{1}$, gdzie szereg jest zbieżny w topologii słabej operatorowej. $\rho_i(M_j)$ oznacza prawdopodobieństwo, że pomiar dał wynik M_j podczas gdy system był w stanie ρ_i. Problem badawczy polegał na znalezieniu optymalnego sposobu na "odgadnięcie" na podstawie pomiaru w jakim stanie znajduje się system.

Funkcja ryzyka została zdefiniowana w następujący sposób:

$$R_M(i) = \sum_j L(i,j)\rho_i(M_j),$$

gdzie $L\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest funkcją straty. Wartość oczekiwana funkcji ryzyka dana jest wzorem: $r(M,\pi) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \pi_i L(i,j)\rho(M_j)$. Głównym wynikiem pracy jest entropijne ograniczenie minimalnej, ze względu na pomiar M, wartości średniej funkcji ryzyka, przy pewnych naturalnych założeniach o funkcji straty L. Załóżmy, że $L(i,j) \leqslant c_i$, gdzie $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i c_i$ jest zbieżny oraz szereg $\sum_{i,j} \pi_i(c_i - L(i,j))\|h_{\rho_i}\|_\infty$ jest zbieżny. Oznaczmy $a_c = \sum_{i,j} \pi_i(c_i - L(i,j))$. Wówczas

$$\min_M r(M,\pi) \leqslant \sum_i \pi_i c_i - 2^{\frac{1}{a_c}(\sum_i S(\varphi_i^c)) - S(\frac{1}{a_c}\sum_i \varphi_i^c)}$$

gdzie S - jest entropią Segala, zaś

$$\varphi_j^c = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(c_i - L(i,j))\rho_i.$$

3.5 Postać operatora modularnego i funkcjonałów entropijnych w półskończonych algebrach von Neumanna

Praca [P15] przedstawia wyniki dotyczące postaci względnego operatora modularnego w półskończonych algebrach von Neumanna. W skończonym wymiarze operator ten jest ograniczony i ma proste przedstawienie "w języku" macierzy gęstości stanów. W wymiarze nieskończonym, operator modularny jest nieograniczony i jego związek z operatorami gęstości, które w ogólnym przypadku są również nieograniczone, był dotąd niejasny. Omawiana praca zawiera twierdzenie o przedstawieniu względnego operatora modularnego przy pomocy macierzy gęstości stanów:

$$\Delta(\varphi,\omega)^s = \pi(h_\varphi^s)\pi'(\widetilde{h_\omega}^s)$$

gdzie φ, ω - stany na półskończonej algebrze von Neumanna o macierzach gęstości h_φ, h_ω; π, π' to reprezentacja i antyreprezentacja algebry $\mathcal{M}$ ze śladem półskończonym τ wprzestrzeni $L^2(\mathcal{M},\tau)$, zaś s jest dowolną liczbą rzeczywistą z przedziału $(0, \frac{1}{2}]$. Wynik ten poprzedziła szczegółowa analiza, która została przeprowadzona przy założeniu wierności stanów. Główny wzór został udowodniony w pełnej ogólności. W dalszej kolejności została przedstawiona tzw. formuła śladowa. Jedną z własności śladu jest równość $\tau(xx^*) = \tau(x^*x)$, którą przy użyciu wzoru polaryzacyjnego można przekształcić do wzoru $\tau(xy) = \tau(yx)$ dla dowolnych $x, y \in L^2(\mathcal{M},\tau)$. W twierdzeniu 15 tej pracy przedstawiony jest wynik dużo ogólniejszy:

Niech $x \in L^p(\mathcal{M},\tau), y \in L^q(\mathcal{M},\tau),\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Wówczas

$$\tau(xy) = \tau(yx).$$

Jego konsekwencją są śladowe formuły funkcjonałów entropijnych.

Entropia względna między dowolnymi stanami wyraża się wzorem

$$S(\varphi,\omega) = -\langle\xi, \log\Delta(\varphi,\omega)\xi\rangle = \tau(h_\omega \log h_\omega - h_\omega \log h_\varphi)$$

i jest równa informacji kwantowej $I(\varphi,\omega)$ dla stanów φ, ω definiowanej przez Umegakiego w przypadku algebry $\mathcal{M}$ ze skończonym śladem.

Quasi-entropię zdefiniowaną w postaci ogólnej wzorem:

$$S_f^k(\varphi,\omega) := -\langle k\xi, f(\Delta(\varphi,\omega))k\xi\rangle$$

można przedstawić w postaci

1. dla $f(t) = -\log t$

$$S_f^k(\varphi,\omega) = \tau(|kh_\omega|^{\frac{1}{2}}(\log h_\omega)|kh_\omega|^{\frac{1}{2}}) - \tau(h_\omega^{\frac{1}{2}}k^*(\log h_\varphi)kh_\omega^{\frac{1}{2}})$$

2. dla $f(t) = t^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1$

$$S_f^k(\varphi,\omega) = \tau(h_\omega^{1-\alpha}k^*h_\varphi^\alpha k)$$

3. dla $f(t) = at + b$

$$S_f^k(\varphi, \omega) = a\varphi(kk^*) + b\omega(k^*k)$$

4. względna entropia Reny'ego, dla $\alpha \neq 1$

$$S_\alpha(\varphi, \omega) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \tau(h_\varphi^{1-\alpha}, h_\omega^\alpha).$$

3.6 Inna działalność naukowo-badawcza

Prezentacje konferencyjne

[K17] K Lubnauer, H Podsędkowska *State determination and sufficiency of subalgebras* Będlewo September 2012

[K18] A. Łuczak and H. Podsędkowska, *State determination and sufficiency of subalgebras* IQSA 2014, Olomunc, July 2014

[K19] H.Podsędkowska, poster, 16th Workshop: Noncommutative Harmonic Analysis Random Matrices, representation theory and free probability, with applications,Będlewo, 2014

[K20] H. Podsędkowska, L. Podsędkowski *Off-line Estimation of Trajectory in Discrete State Space using the Minimal-covariance Adaptive FIR Smoothing with Extended Output Vector* Methods and Models in Automation and Robotics MMAR 2015, 20th International Conference on Pages: 1179 - 1184, DOI: 10.1109/MMAR.2015.7283984, 10 pkt. MNiSW

[K21] A. Łuczak, H. Podsędkowska *Properties of Segal's entropy for general quantum system IQSA Leicester*, United Kingdom 2016

[K22] H. Podsędkowska, *Properties and some application meaning of Segal's entropy for general quantum system*, Different Aspects of Analysis and Probability, DAAP Rzeszów, Poland, 2016,

[K23] H. Podsędkowska and R. Wieczorek *Applications of Segal's entropy for Holevo type bounds in general quantum system*, IQSA Nijmegen, The Netherlands, 2017

[K24] H.Podsędkowska, R. Wieczorek, *Properties and applications of Segal's entropy in general quantum system*, Wandering Seminar Łódź, Poland, 2017

[K25] H.Podsędkowska, *General Quantum Systems-Strong subadditivity of entropy*, 18th Workshop: Noncommutative Probability, Operator Algebras, Random Matrices and Related Topics, with Applications, Będlewo, 2018

[K26] H. Podsedkowska *Strong subadditivity of quantum mechanical entropy for semifinite von Neumann algebras* IQSA Tropea, Italy, 2022

[K27] A. Łuczak. H. Podsędkowska Rafał Wieczorek *Quantum relative quasi-entropies in semifinite von Neumann algebras* IQSA Tropea, Italy, 2022

[K28] Projekt badawczy NCN *"Podstawowe zagadnienia teorii informacji kwantowej oraz dyskryminacji stanów i operacji kwantowych"* no 2011/01/B /ST1/03994, kierownik A. Łuczak, udział własny - główny wykonawca.

W latach 2011-2014 pracowałam, jako jeden z głównych wykonawców, w projekcie NCN zatytułowanym "Podstawowe zagadnienia teorii informacji kwantowej oraz dyskryminacji stanów i operacji kwantowych", nr umowy UMO-2011/01/B/ST1/03994.

W roku 2018 byłam pomysłodawcą i organizatorem konferencji naukowej "Quantum Statistics and Related Topics"w Łodzi.

4 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, w szczególności zagranicznej.

- W latach 2011-2015 prowadziłam prace badawcze na Politechnice Łódzkiej w ramach projektu badawczego „Opracowanie i badania algorytmów aktywnego (siłowego) wspomagania operatora przy wykonywaniu stereotypów ruchowych podczas sterowania telemanipulatorem o sześciu stopniach swobody" na lata 2011-2015 finansowanego przez NCN, Umowa nr UMO-2011/01/B/ST7/04011. W projekcie tym byłam odpowiedzialna za opracowanie nowej metody statystycznej obróbki danych pomiarowych wykorzystującej dane pomiarowe z pełnego okresu próbkowania do optymalnego estymowania stanu systemu o sześciu stopniach swobody. Opracowana metoda wykorzystuje zależności podobne do tych, które są stosowane w filtrze Kalmana, ale rozszerza je na pełną przestrzeń próbkowania. Wyniki zostały opublikowane w artykule „The adaptive optimal Finite Impulse Response smoothing for off - line estimation of the states of the system described by discrete state space model using Extended Output Vector"

- W czerwcu 2023 prowadziłam badania naukowe związane z teorią stanów na algebrach operatorowych w Czeskim Uniwersytecie Technicznym w Pradze w zespole z prof. Janem Hamhalterem i doc. Martinem Bohata. Na seminarium Katedry Matematyki CUT zostały omówione wstępne wyniki, które są podstawą dalszej współpracy i planowanej publikacji.

5 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

- Od 2012r. - czynny udział w corocznym (z przerwą na czas pandemii) Festiwalu Nauki Techniki i Sztuki, organizowanym na Wydziale Matematyki i Informatyki. Prowadzenie warsztatów i wykładów popularnonaukowych dla uczniów szkół średnich i podstawowych.
- Wielokrotny udział w pracach zespołu organizującego konkurs "Matematyka Moja Pasja"
- Prowadzenie zajęć dydaktycznych (wykładów, ćwiczeń i seminariów) na kierunkach: Matematyka, Informatyka, Analiza danych, I i II stopień oraz zajęć w języku angielskim (wykładów i ćwiczeń) dla studentów programu Erasmus i kierunku Computer Science.
- Opieka nad pracami licencjackimi (11 prac wypromowanych od 2006r.) oraz pracami magisterskimi (4 prace wypromowane od 2019r.)

- Recenzowanie prac licencjackich i magisterskich (ogółem 19 prac od 2015r.)
- 2021r. - Nagroda Rektora UŁ, zespołowa stopnia pierwszego, za cykl publikacji pt."Kwantowa teoria prawdopodobieństwa, statystyka kwantowa i teoria kwantowa półgrup dynamicznych"
- 2020r. - Złota Odznaka UŁ za zaangażowanie w sprawy działalności i rozwoju UŁ.
- 2016r. - Nagroda Rektora UŁ, zespołowa stopnia pierwszego, za cykl publikacji pt."Wybrane zagadnienia statystyki kwantowej"
- 2012r. - Medal brązowy za długoletnią służbę

Literatura

[1] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantermachanik*, Springer, Berlin-Heidelberg 1932,

[2] I.E. Segal, *A note on the concept of entropy*, J. Match. Mech. **9**(4) 1960, 623-629

[3] M. Ohya, D. Petz, *Quantum entropy and its use*, Springer (1993).

[4] M.B. Ruskai, *A generalisation of entropy using traces on von Neumann algebras*, Annals de l'I.H.P., section A, t**19**, (1973) 357-373.

[5] O.E. Lanford, D.W. Robinson, *Mean entropy of states in quantum statistical mechanics*, J. Math. Phys. **9** (1968), 1120–1125.

[6] H. Umegaki, *Conditional expectation in an operator algebras IV*, Kodai Mathematical Seminar Reports, vol. **14** (1992) 59-85.

[7] E.H. Lieb, M.B. Ruskai, *Proof of the strong subadditivity of quantom-mechanical entropy*, Journal of Mathematical Physics **14** (1973).