Łódź, 30.05.2019 r.

Prof. dr hab. Piotr Kosiński
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Łódzki

Recenzja rozprawy habilitacyjnej
pt. „Uogólnienia ciągłe testu Painleve"
i ocena dorobku naukowego dr. Piotra Goldsteina

Na rozprawę habilitacyjną Pana Piotra Goldsteina składa się cykl sześciu prac opublikowanych w renomowanych czasopismach o międzynarodowym zasięgu (Journ. Phys. Comm. – 1, Phys. Lett. A – 1, Journ. Nonl. Math. Phys. – 1, Acta Phys. Polon. A – 3). Jedna praca jest autorska, pozostałe – współautorskie; oświadczenia współautorów nie pozostawiają wątpliwości, że dr Goldstein wniósł bardzo istotny wkład do wspólnych prac.

Test Painleve stanowi ważne narzędzie teorii równań różniczkowych i układów dynamicznych. Pozwala ocenić zachowanie się rozwiązań równań różniczkowych (regularne vs. chaotyczne), co jest szczególnie istotne w przypadku, gdy rozwiązania nie są analitycznie dostępne. Umożliwia znalezienie niektórych całek ruchu, a także, w przypadkach całkowalnych, postaci transformacji Backlunda.
Równanie różniczkowe w zmiennej (zmiennych) zespolonych ma własność Painleve, jeżeli ruchome (tzn. zależne od warunków specyfikujących rozwiązanie szczególne) osobliwości jego rozwiązań nie są punktami rozgałęzienia. Spełnienie tej własności stanowi silną sugestię, że dynamika opisywana rozważanym równaniem jest zupełnie całkowalna.

Praca [1] (numeracja wg autoreferatu) zawiera analizę własności Painleve dla modeli sigma opisujących dynamikę pól zdefiniowanych na dwuwymiarowej (czaso)przestrzeni i przyjmujących wartości w zespolonych przestrzeniach rzutowych (modele $\mathbb{C}P^{N-1}$). Taki wybór jest interesujący z kilku powodów. Modele $\mathbb{C}P^{N-1}$ znajdują zastosowanie w opisie różnych nieliniowych zjawisk fizycznych. Z drugiej strony, cechują się wysoką symetrią i złożoną strukturą matematyczną. Ograniczając się do podrozmaitości rozwiązań o skończonym działaniu otrzymujemy dynamikę zupełnie całkowalną. Wychodząc poza tę podrozmaitość napotykamy rozwiązania (o nieskończonym działaniu) posiadające punkty rozgałęzienia zależne od warunków początkowych, a zatem niespełniające testu Painleve. Znalezienie jawnej postaci takich rozwiązań jest możliwe dzięki wysokiej symetrii modelu $\mathbb{C}P^{N-1}$. Za główne, bardzo interesujące osiągnięcie pracy uważam pokazanie, że spośród dopuszczalnych a priori $4(N-1)$ całek ruchu, $4N-5$ „przeżywa" wyjście poza obszar zupełnej całkowalności. Co więcej, znajomość jawnych rozwiązań z ruchomymi punktami rozgałęzienia rzuca dodatkowe światło na związek niepełnej całkowalności z testem Painleve.

Praca [2] dotyczy zastosowania testu Painleve w teorii powierzchni izotermicznych. Z równania przewodnictwa cieplnego wynika, że powierzchnie izotermiczne w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej można opisać czysto geometrycznie: forma metryczna jest konforemna z drugą formą powierzchni. Ponad sto lat temu Bianchi pokazał, że odpowiednie równania Gaussa-Mainardiego-Codazziego są warunkami całkowalności pewnego liniowego układu równań, co sugeruje zupełną całkowalność i stosowalność (ogólnie rozumianej) metody odwrotnego rozpraszania. Naturalną drogą do weryfikacji tego przypuszczenia jest przeprowadzenie testu Painleve. W pracy [2] pokazano, że równania Gaussa-Mainardiego-Codazziego (i wynikające z nich równanie Calapso) mają własność Painleve. Co więcej, dodatkowym efektem analizy własności Painleve było wyprowadzenie niestandardowej transformacji Backlunda. Omawiana praca zwiera też ważny nowy pomysł autorstwa Piotra Goldsteina. Własność regularności (całkowalności) chaotyczności układu dynamicznego powinna być cechą niezależną od specyficznego wyboru zmiennych zależnych i niezależnych; dotyczy to zatem również testu Painleve. Ten warunek nie sprawia kłopotu dopóki rozważamy biholomorficzne zamiany zmiennych. Okazuje się jednak, i jest to bardzo istotna obserwacja, że istnieje inna możliwość: szukana funkcja (funkcje) występuje w równaniu w specyficznych kombinacjach i/lub (jedno z drugim jest związane) informacja fizyczna/geometryczna zakodowana jest w takich kombinacjach. W takim przypadku formę rozwinięcia w analizie Painleve można uogólnić. W konkretnym modelu rozważanym w pracy [2], w równaniach G-M-C występują tylko pochodne lub wykładnik jednej z funkcji, co uzasadnia uzupełnienie jej szeregu Laurenta członem logarytmicznym.

Kolejna praca [3] zawiera analizę Painleve zespolonego równania sin-Gordona (sh-Gordona). Ponownie poczyniono tu ważną obserwację, że w pewnych przypadkach, w przeciwieństwie do powszechnie przyjmowanego założenia, rozwinięcie Laurenta można rozpocząć od zerowej potęgi zmiennej charakteryzującej rozmaitość osobliwości. Możliwość wystąpienia takiej sytuacji związana jest ze specyficzną formą nieliniowości rozważanego równania. Innym, aczkolwiek negatywnym wynikiem pracy [3] jest stwierdzenie, że dla zespolonego równania sin-Gordona pozytywny test Painleve nie daje efektywnej metody całkowania poza znanymi już przypadkami.

Praca [4] dotyczy analizy oddziaływania podstawowego modu laserowego z jego trzecią harmoniką przy propagacji w płaskim falowodzie. Podstawiając do równania propagacji pola elektrycznego w falowodzie kombinację pierwszej i trzeciej składowej harmonicznej i zakładając wolną zmienność amplitud otrzymuje się układ równań drugiego rzędu na odpowiednio przeskalowane amplitudy (równanie (7) w [4]). Kwestia istnienia impulsów solitonowych sprowadza się do pytania o całkowalność tego układu. Należy więc przeprowadzić test Painleve. W zasadzie można tutaj zastosować standardowy algorytm; w praktyce otrzymane relacje rekurencyjne są niezwykle złożone. Sprawność techniczna dr. Goldsteina, który mimo tej złożoności był w stanie wyprowadzić jasne i wartościowe wnioski, budzi szacunek. Dominujące wykładniki w rozwinięciach Laurenta wszystkich szukanych funkcji są równe -1, natomiast określenie współczynników wymaga rozwiązania paskudnego równania trzeciego stopnia (równanie (10) w [4]). Recenzent spokojnie może uwierzyć dr. Goldsteinowi, że zastosowanie wzorów Cardano niewiele pomaga (w swojej karierze recenzent nie spotkał się z sytuacją, w której byłyby one użyteczne).

Jeszcze większy podziw recenzenta budzi równanie (12) na wartość wskaźników, dla których znika wyznacznik układu równań rekurencyjnych; współczynniki liczbowe w równaniu (12), rzędu 10^{20}, nie mają wspólnego dzielnika poza jedynką. Dla dalszej analizy nie jest to chyba bardzo istotne, ale pokazuje, że mamy do czynienia z najprostszą formą równania i dowodzi, że dr Goldstein ceni sobie matematyczną elegancję. Równanie (12) ma cztery rozwiązania całkowite; pozostałe są niecałkowite. Wynika stąd, że rozpatrywany układ równań nie ma własności Painleve. Natomiast dopuszcza, bez ograniczeń na parametry, czteroparametrową rodzinę rozwiązań meromorficznych. Podobne rozważania, dotyczące oddziaływania modu podstawowego z drugą harmoniką, są przedmiotem pracy [5]. Podobnie jak w przypadku trzeciej harmoniki, otrzymuje się układ równań drugiego rzędu na odpowiednio przeskalowane amplitudy, który można poddać testowi Painleve. Okazuje się, że ponownie własność Painleve nie zachodzi, natomiast istnieje czteroparametrowa rodzina rozwiązań meromorficznych, jeżeli stosunek współczynników dyspersji obu modów przyjmuje dwie określone wartości (z których jedna jest niefizyczna). Wynik przewidziany przy pomocy testu Painleve pokrywa się z warunkiem istnienia fal samotnych otrzymanym metodą Hiroty. Przy spełnieniu warunku na stosunek współczynników dyspersji rozważane równania sprowadzają się do nieliniowego równania Schrödingera z kwadratową nieliniowością. W przeciwieństwie do sześciennego równania Schrödingera nie jest ono zupełnie całkowalne, w zgodzie z analizą Painleve; w konsekwencji, nie dopuszcza ono rozwiązań wielosolitonowych.

Ostatnia, autorska praca cyklu [6] dotyczy związku między metodą Hiroty rozwiązywania równań typu solitonowego a analizą struktury osobliwości, ściśle związaną z testem Painleve. Zapoznając się po raz pierwszy z metodą Hiroty trudno oprzeć się wrażeniu, że mimo rozbicia jej na szereg kroków, jest ona, jak pisze dr Goldstein, raczej rodzajem sztuki niż systematyczną procedurą. Z drugiej strony, wymierna forma wyjściowego podstawienia w metodzie Hiroty sugeruje związek z rozwinięciem Laurenta używanym w teście Painleve. Istotnym krokiem w metodzie Hiroty jest wyrażenie równań otrzymanych w pierwszym kroku metody w terminach biliniowych operatorów Hiroty. Oryginalnym pomysłem dr. Goldsteina jest użycie w tym celu informacji zawartej w częściach głównych szeregu Loranta i, jeśli to nie wystarcza, również w wyrazach wyższego rzędu. Dr Goldstein swój pomysł nazywa drobnym wynikiem, ale jego prostota połączona ze skutecznością zrobiła na mnie duże wrażenie po przestudiowaniu przykładu nieliniowego równania Schrödingera (równania (31) - (36) w [6]).

W swoim autoreferacie Pan Piotr Goldstein wymienił wyniki zawarte w rozprawie. Nie ma potrzeby przytaczania tutaj szczegółowej ich listy. Ogólnie mówiąc, przejście od prostych przykładów, dla których test Painleve jest zalgorytmizowany, do modeli bardziej realistycznych z fizycznego punktu widzenia wymaga istotnie nowych pomysłów, których nie brak w rozprawie. Bardzo wysoko oceniam jej oryginalność, a także biegłość, z jaką dr Goldstein porusza się w technicznie skomplikowanej materii. Nie mam wątpliwości, że jego rozprawa habilitacyjna stoi na bardzo wysokim poziomie.

Pozostały dorobek dr. Goldsteina po uzyskaniu stopnia doktora obejmuje 17 prac, z czego 15 opublikowanych w renomowanych czasopismach (Phys. Lett. A, Journ. Phys. A, Physica A, Journ. Plasma Phys. i in.), jedna znajduje się na razie w archiwum elektronicznym, a jedną stanowi książka, której Piotr Goldstein jest współautorem. Część publikacji dotyczy testu Painleve dla równań Maxwella-Blocha, Zacharowa i Własowa. W przypadku równań Maxwella-Blocha i Własowa zastosowanie testu Painleve ponownie wymaga nowych pomysłów. Warto tutaj też wymienić pracę o całkowalności niejednorodnego modelu Heisenberga, która bardzo mi się spodobała. Pozostałe prace dotyczą zjawisk nieliniowych w plazmie, relatywistycznego transportu ciepła, a także matematycznych aspektów modeli $\mathbb{C}P^{N-1}$. Z tych ostatnich z zaciekawieniem i przyjemnością przeczytałem artykuł o niezmienniczym opisie modeli $\mathbb{C}P^{N-1}$.

Wniosek końcowy

Uważam, że przedstawiona rozprawa habilitacyjna i dorobek naukowy dr. Piotra Goldsteina stanowią znakomitą podstawę do ubiegania się o stopień doktora habilitowanego i wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego.

Prof. dr hab. Piotr Kosiński